

材料力學 非線性問題 總整理

第一章 力量 ~ 非線性問題

1. 熟悉基本觀念：(1) δ 與 l 成正比 藍翊耀 編授
2. 求永久變形(permanent deformation)：利用基本觀念
3. 求反力(reactions force)

(1) step 1：檢查負荷是否進入非線性區(先視為線性作用
找出負荷最大值)

(2) step 2：設定最大負荷 $P_{\max} = \sigma_{yp} \cdot A$

(3) step 3：求另一側的值 $\Sigma F = 0$ (靜力平衡)

4. 求殘留應力(Residual stress)

(1) step 1：負荷作用期(屬於非線性階段)：求出 P_{A1} 與 P_{B1}
(解法同上一步驟 ~ 非線性負荷作用求反力)

(2) step 2：外力釋放期(屬於線性階段)：求出 P_{A2} 與 P_{B2}
(解法同線性負荷時 ~ 既槓桿原理加重疊原理)

(3) step 3：求合成反力： $P_A = P_{A1} + P_{A2}$ (注意方向)
 $P_B = P_{B1} + P_{B2}$ (注意方向)

(4) step 4：求殘留應力(代公式)

$$\sigma_{RA} = \frac{P_A}{A} \quad ; \quad \sigma_{RB} = \frac{P_B}{A} \quad (\text{注意方向})$$

(5) 討論：在材料產生 ”降伏段的部份”，所得之最後反力及殘留應力的方向與原來方向相反。

第二章 扭轉 (Torsion) ~ 非線性問題

1. 熟悉基本觀念：(1) γ 與 ρ 成正比 藍翊耀 編授

$$(2) \gamma \cdot l = \rho \cdot \Phi$$

(3) 判斷降伏半徑 ρ_y 的位置

2. 求永久變形(permanent deformation)：利用基本觀念

3. 求負荷(load)：

(1) 完全線性 ($\rho_y = r = c$)：彈性扭矩(elastic torque) T_y

代公式(同前所述)

(2) 彈塑性區 ($\rho_y < \rho < c$)：彈塑性扭矩(elastic plastic torque) T

a. 找出降伏半徑 ρ_y 的位置

b. 用積分(分段積分)：

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \int_0^c \tau \cdot \rho^2 d\rho = 2\pi \left[\int_0^{\rho_y} \left(\tau_y \cdot \frac{\rho}{\rho_y} \right) \rho^2 d\rho + \int_{\rho_y}^c (\tau_y) \rho^2 d\rho \right] \\ &= \frac{4}{3} \cdot T_y \left[1 - \frac{1}{4} \frac{\rho_y^3}{c^3} \right] \text{ (圓形斷面)} \end{aligned}$$

(3) 完全塑性時 ($\rho_y = 0$) 塑性扭矩(plastic torque) T_p ：

$$T_p = 2\pi \int_0^c \tau \cdot \rho^2 d\rho = 2\pi \int_0^c \tau_y \cdot \rho^2 d\rho = \frac{4}{3} \cdot T_y \text{ (圓形斷面)}$$

4. 求反力(reactions force)

(1) step 1：檢查負荷是否進入非線性區(先視為線性作用
找出負荷最大值)

(2) step 2：設定最大負荷 $T_{\max} = \frac{\tau_{\max} \cdot J}{R} = \frac{\tau_{yp} \cdot J}{R}$

(3) step 3：求另一側的值 $\sum T = 0$ (靜力平衡)

5.求殘留應力(Residual stress)

*** A.一般靜定問題

(1)step 1：負荷作用期(屬於非線性階段 ~ 正值)：求出 τ_{A1} 與 τ_{B1} (此時

常用彈塑區 $\tau_{A1} = \tau_{B1} = \tau_{yp}$)

(2)step 2：外力釋放期(視為反方向線性負荷 ~ 負值)：求出

τ_{A2} 與 τ_{B2} (解法同線性負荷時 $T = T_p$ 代回公式)

(3)step 3：求合成應力： $\tau_{RA} = \tau_{A1} + \tau_{A2}$ (注意方向)

$\tau_{RB} = \tau_{B1} + \tau_{B2}$ (注意方向)

(4)討論：在材料產生”降伏段的部份”，所得之最後反力及殘留應力的方向與原來方向相反。

B.靜不定問題

(1) step 1：負荷作用期(屬於非線性階段 ~ 正值)：求出

T_{A1} 與 T_{B1} (解法同上一步驟 ~ 非線性負荷作用求反力)

(2) step 2：外力釋放期(視為反方向線性負荷 ~ 負值)：求出

T_{A2} 與 T_{B2} (解法同線性負荷時 ~ 既槓桿原理加重疊原理)

(3)step 3：求合成反力： $T_A = T_{A1} + T_{A2}$ (注意方向)

$T_B = T_{B1} + T_{B2}$ (注意方向)

(4)step 4：求殘留應力(代公式)

$$\tau_{RA} = \frac{T_A \cdot \rho}{J} \quad ; \quad \tau_{RB} = \frac{T_B \cdot \rho}{J} \quad (\text{注意方向})$$

(5)討論：在材料產生”降伏段的部份”，所得之最後反力及殘留應力的方向與原來方向相反。

第三章 樑之彎矩 ~ 非線性問題

1. 熟悉基本觀念：(1) ε 與 y 成正比 藍翊耀 編授
(2) 判斷降伏半徑 Y_y 的位置
2. 求永久變形(permanent deformation)：利用基本觀念
3. 求負荷(load)：

(2) 完全線性 ($Y_y = c$)：彈性彎矩(elastic moment) M_y

(a) 方法一：代公式(同前所述) $M_y = \sigma_y \cdot \frac{I}{C}$

(b) 方法一：用積分(少用)

$$M = M_y = \int y dF = \int y (\sigma dA) = \int y \left(\frac{\sigma_{yp}}{y_{yp}} \cdot y \right) dA = \frac{\sigma_{yp}}{y_{yp}} \int y^2 dA$$

(c) 方法三：step 1：求中立軸的正確位置。(既為形心軸)

step 2：求彈性彎矩 $M_y = \sigma_y \cdot \frac{I}{C_{\max}} = \sigma_y \cdot S$

其中： $S = \frac{I}{C}$ ，截面模數(section modulus)

(2) 彈塑性區 ($Y_y < y < c$)：彈塑性彎矩(elastic plastic moment) M

a. 找出開始降伏的位置 Y_y 。觀念： ε 與 y 成正比

b. 求彎矩值

(a) 方法一：用積分(分段積分)(少用)

$$M = \int y dF = \int y (\sigma dA) = \int_0^{Y_y} \frac{\sigma_{yp}}{y_{yp}} \cdot y^2 dA + \int_{Y_y}^c \sigma_{yp} \cdot y dA$$

(b) 方法二：step 1：求各段面積所圍區域之拉或壓力及形心位置

step 2：求合力矩(合力偶)

$$M = \frac{3}{2} \cdot M_y \left[1 - \frac{1}{3} \frac{Y_y^2}{C^2} \right] \quad (\text{矩形斷面})$$

(3)完全塑性時 ($Y_y = 0$) : 塑性彎矩(plastic moment) M_p

(a)方法一：用積分(少用)

$$M = M_p = \int y dF = \int y (\sigma dA) = \int y (\sigma_{yp})dA = \sigma_{yp} \int y dA$$

(b)方法二：step 1：求各段面積所圍區域之拉或壓力及形心位置

step 2：求合力矩(合力偶)

$$M_p = \frac{3}{2} \cdot M_y \quad (\text{矩形斷面})$$

(c)方法三：step 1：求中立軸的正確位置。 $A_{\text{拉力}} = A_{\text{壓力}} = \frac{1}{2} \cdot A_{\text{全}}$

step 2：求塑性彎矩 $M_p = \sigma_y \cdot \frac{A}{2} (y_1 + y_2) = \sigma_y \cdot Z$

其中： $Z = \frac{A}{2} (y_1 + y_2)$ ，塑性模數(plastic modulus)

(3)形狀因素(shape factor) κ

$$k = \frac{\text{塑性彎矩}}{\text{彈性彎矩}} = \frac{M_p}{M_y} = \frac{Z(\text{塑性模數})}{S(\text{截面模數})} > 1$$

4.求反力(reactions force)

(1)step 1：檢查負荷是否進入非線性區(先視為線性作用
找出負荷最大值)

(2)step 2：設定最大負荷 $M_{\text{max}} = \frac{\sigma_{\text{max}} \cdot I}{C} = \frac{\sigma_{yp} \cdot I}{C}$

(3)step 3：求另一側的值 $\sum M = 0$ (靜力平衡)

5.求殘留應力(Residual stress)

*** A.靜定問題

(1)step 1：負荷作用期(屬於非線性階段 ~ 正值)：求出 σ_{A1} 與 σ_{B1} (此時常用彈塑區 $\sigma_{A1} = \sigma_{B1} = \sigma_{yp}$)

(2)step 2：外力釋放期(視為反方向線性負荷 ~ 負值)：求出

σ_{A2} 與 σ_{B2} (解法同線性負荷時 $M = M_p$ 代回公式)

(3)step 3：求合成應力： $\sigma_{RA} = \sigma_{A1} + \sigma_{A2}$ (注意方向)

$$\sigma_{RB} = \sigma_{B1} + \sigma_{B2} \text{ (注意方向)}$$

(4)討論：在材料產生”降伏段的部份”，所得之最後反力及殘留應力的方向與原來方向相反。

B.靜不定問題

(1)step 1：負荷作用期(屬於非線性階段 ~ 正值)：求出

M_{A1} 與 M_{B1} (解法同上一步驟 ~ 非線性負荷作用求反力)

(2)step 2：外力釋放期(視為反方向線性負荷 ~ 負值)：求出

M_{A2} 與 M_{B2} (解法同線性負荷時 ~ 既槓桿原理加重疊原理)

(3)step 3：求合成反力： $M_A = M_{A1} + M_{A2}$ (注意方向)

$$M_B = M_{B1} + M_{B2} \text{ (注意方向)}$$

(4)step 4：求殘留應力(代公式)

$$\sigma_{RA} = \frac{M_A \cdot C}{I} \quad ; \quad \sigma_{RB} = \frac{M_B \cdot C}{I} \quad \text{(注意方向)}$$

(5)討論：在材料產生”降伏段的部份”，所得之最後反力及殘留應力的方向與原來方向相反。