

靜力學架構 及 基本觀念

藍翔耀 編授

<重點一>：質點與剛體的區分

1. 質點：一物體若僅有平移之運動，則可視之為質點。
- 2 剛體：一物體之運動需有旋轉(或有平移、有旋轉)，則視為剛體。

<重點二>：力量與力矩

1. 力量與力矩除了所產生的效應不同外，其餘的觀念均相同。
--- 包含解題與分析的觀念均相同。
2. 力量(F)：對物體所產生的效應為 " 平移 " --- 視為質點 。
- 3 力矩(M)：對物體所產生的效應為 " 旋轉 " --- 視為剛體

<重點三>：靜力學架構

負荷 \Rightarrow $\left[\begin{array}{l} \text{力} \Rightarrow \text{力的可傳性原理} \\ \text{力矩(力偶)} \Rightarrow \text{力矩原理} \rightarrow \text{力偶的應用} \end{array} \right]$

- \Rightarrow 等值力系(一單力及一力偶) \Rightarrow 力系的合成(化成最簡)
- \Rightarrow 平衡(或反力，自由體圖) \Rightarrow 應用(結構分析、摩擦及摩擦的應用、形心及形心的應用、慣性矩與慣性積 等等。)

** <重點四>：力的可傳性原理

1. 定義：力的大小及方向不變，而作用點“可沿力之作用線”任意移動，而不改其“外效應”。
1. 適用性：力的可移性僅適用於剛體，而不適用於非剛體；
故力的可移性不會改變外效應但會改變內效應。

** <重點五>：力矩原理

1. 定義：各力系(分力)對某一點(或某一軸)取力矩會等於其合力對該點(或該軸)取力矩。又稱為范立農原理。
2. 應用：求解合力作用點時之唯一方法。

<重點六>：單力與力偶間的轉換

(力偶的應用：將一單力 $\xleftarrow{\text{轉換成}}$ 一單力及一力偶)

1. 由力的可傳性原理知：一力若 "沿著作用力的方向" 移動，則不改其外效應(既，力的大小及方向均不改變)；但
2. 若 "非沿著作用力的方向" 移動，則除了原來的作用力外會再增加一個力矩(需注意力矩的方向) 。
3. 口訣：相當於對 "新的點" 取力矩。

<重點七>：等值力系

藍翔耀 編授

1. 定義：若不相同的力系對同一物體有相同之外效應，則稱這些力系互為等值力系。
2. 條件：(1) 合力相等(大小、方向均應相等)且
(2) 合力偶亦相等(大小、方向均應相等)
3. 口訣：(1) 合力相等 ----- 求力系之合力。
(2) 合力偶亦相等 --- 過那一點等值就對該點取力矩。

<重點八>：當一力系化成最簡(求合力)時有以下之可能

1. 零(平衡)
2. 僅有一單力
3. 僅有一力偶
4. 同時有一單力及一力偶(此一狀況僅會發生在空間非共點非平行力系時，既所謂的板鉗力系 wrench)

**<重點九>：平衡的定義

1. 定義：一力系作用於物體，若不改其運動狀態；既靜者恆靜，動者恆作等速直線運動者，謂之力的平衡。
亦既：物體的加速度等於零。

2. 充要條件：(1) 合力為零 $\sum F = 0$, $\Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$

(2) 合力偶亦要為零 $\sum M_0 = 0$

3. 二力構件

- (1). 定義：一物體若受兩外力的作用而平衡，則此兩力必大小相等，方向相反且作用在同一條直線上。
- (2). 條件：
(a) 一桿件前後僅有兩個銷接點。 藍翔耀 編授
(b) 除銷接點外 "桿件間" 不受任何外力 (包含 F、M 及自重)
(c) 不計桿件的自重。
- (3). 應用：當已知桿件為二力構件時，則便可判別此一構件反力的方向(沿著兩銷接點的連線上)，只剩反力的大小未知。

(4).重要觀念：分析靜力學問題時，若遇有桿件必須先檢查是否有二力構件存在，若題意內有二力構件存在而讀者沒有發現，則所求得之解十之八九為誤解，故請讀者務必養成良好的習慣。切記!! 切記!! 藍翔耀 編授

4.三力構件：一物體若受三個外力的作用而平衡，則此三個外力若不平行必相交於一點上。

5.自由體圖的定義與畫法

(1).定義：將受力的物體全部(或部分)與周圍相接觸的其它物體隔離，在被隔離的地方以一未知力來表示的圖形，謂之自由體圖(Free Body Diagram)

(2).畫自由體圖應注意事項

(a)作用於自由體圖上的力，無論為已知(原來作用的外力及自重)或未知(被隔離處)，均應全部表示出來。

(b)作用於自由體圖上的未知力，其方向可事先假設，若所求得答案為負值，則表示實際指向與假設的方向相反。

(3)考慮自重時特別注意：物體在重量才在，反之物體不在(已被分離)則該物體的自重就不必繪出。

(4)同一接觸面、接處點或桿件的銷接點分別畫於相接觸的兩物體時其兩力大小相等、方向相反。

6.常見支承的反力(需熟記)

(1)滾支承 (2).鉸接(或銷) (3).固定支承

(4).直線滑動：與動路垂直

(5)曲線滑動：過接觸點所作的公法線上。特例：當曲線為圓弧時反力必通過“圓心與接觸點的連線”。

(6).繩：(a)連續性繩：繩子張力處處相等。(交接點可自由滑動)

(b)不連續性繩：繩子張力不相等。(打死結)

(7)彈簧：

a.觀念：離開截面(或節點)取正(拉伸彈簧)，
指向截面(或節點)取負(壓縮彈簧)

b.符號：伸長量(變化量) $\delta(=x) = \Delta l = l_{\text{後來}} - l_{\text{原來}}$ (產生正負號)

彈簧常數(彈簧率)定義：

$$(a) K = \frac{\text{負荷}}{\text{變形量}} = \frac{P_1}{\zeta_1} = \frac{P_2}{\zeta_2} = \frac{P_3}{\zeta_3}$$

$$(b) K = \frac{\text{相對負荷}}{\text{相對變形量}} = \frac{\text{負荷的變化量}}{\text{變形的變化量}} = \frac{P_2 - P_1}{\epsilon_2 - \epsilon_1}$$

$$= \frac{\text{負荷的變化量}}{\text{長度的變化量}} = \frac{P_2 - P_1}{L_2 - L_1}$$

c.彈簧力：(a).非線性彈簧： $F_s = kX^n$ ($n \neq 1$)

(b).線性彈簧： $F_s = kX^1$ ($n = 1$)

d.彈性位能：(a).定義： $Ve = \int F_s dX$

(b)非線性彈簧： $Ve = \int F_s dX = \frac{1}{n+1} kX^{n+1}$

(c)線性彈簧： $Ve = \int F_s dX = \frac{1}{2} kX^2$

**<重點十>：結構分析

1. 特殊桿件(銜接點之特殊狀況) 藍翔耀 編授

- (1) 銜接點上只有二根桿件(含外力)且兩桿不共線，則兩桿件其值均為零，既 $F_1 = F_2 = 0$
- (2) 銜接點上只有三根桿件(含外力)且其中兩桿共線，則不共線的桿件其值必為零，既 $F_2 = 0$ 且 $F_1 = F_3$
- (3) 銜接點上只有四根桿件(含外力)且兩兩共線，則其值兩兩相等，既 $F_1 = F_3$ 且 $F_2 = F_4$

***2. 分析桁架需注意的觀念

(1)多練習幾何圖形

- a. 找斜率
- b. 找對應的角度
- c. 找力臂

(2)截面選用的原則

所選取之截面其未知力的個數最好不要超過三根，若超過三根，則除了所要求的未知力外，其餘的未知力均相交於一點上(力矩點)。

(3)力矩點的選用原則

- a.除了所要求的未知力外，其餘的所有未知力均交於該點上

b.力矩點可在自由體圖內或外均可

c.使選用後所表示的力臂其數據愈簡單愈好

(4)靈活使用三組靜力平衡方程式 $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum M_o = 0$

，勿以為截面法就只能取力矩 $\sum M_o = 0$

**<重點十一>：摩擦

1. 庫倫摩擦定律

(1)先求出正壓力 N 的大小

(2)判別目前之運動狀態，再決定摩擦力的大小：

a.施力 $< \mu_s N \Rightarrow$ 表示物體在靜止狀態 \Rightarrow 摩擦力 $f =$ 當時的施力

b.施力 $= \mu_s N \Rightarrow$ 表示物體在臨界狀態 \Rightarrow 摩擦力 $f = f_s = \mu_s N$

c.施力 $> \mu_s N \Rightarrow$ 表示物體在運動狀態 \Rightarrow 摩擦力 $f = f_k = \mu_k N$

1. 摩擦力的方向判別方法：與主動運動的物體方向相反；
與主動運動相接觸的物體(從動件)方向相同。

--- (主動相反、從動相同) 藍翔耀 編授

3. 重要名詞介紹

(1)摩擦角(ϕ)

(2)最大靜止角(θ)

(3)摩擦角(ϕ)、最大靜止角(θ)與摩擦係數(μ)三者間關係：

$$\tan \phi = \tan \theta = \mu$$

**<重點十二>：形心、慣性矩與慣性積摩擦

1.形心、慣性矩之公式

(1) 形心： $\bar{x} = \frac{\int x dA}{A}$, $\bar{y} = \frac{\int y dA}{A}$ (不規則形狀~用積分)

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i} , \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} \quad (\text{規則形狀})$$

(1) 慣性矩(二次方矩 I、J)：永遠為正號

a.種類：面積慣性矩(材料力學用)

質量慣性矩(動力學用)

b.定義： 藍翔耀 編授

(a)面積慣性矩：面積繞著某一個軸的二次方在旋轉

$$I_x = \int y^2 dA, I_y = \int x^2 dA, J = I_x + I_y = \int (x^2 + y^2) dA = \int r^2 dA$$

(b)質量慣性矩：質量繞著某一個軸的二次方在旋轉

$$I_x = \int y^2 dm, I_y = \int x^2 dm, J = I_x + I_y = \int (x^2 + y^2) dm = \int r^2 dm$$

(3).慣性積(二次方矩 I_{xy})：有正、負號

a.面積慣性積： $I_{xy} = \int xy dA$

b.質量慣性積： $I_{xy} = \int xy dm$

(4).面積的一次矩(Q)：有正、負號

a.定義：面積繞著某一個軸的一次方在旋轉

$$Q_x = \int y dA, Q_y = \int x dA \quad (\text{不規則形狀} \sim \text{用積分})$$

$$Q_x = \sum y_i A_i, Q_y = \sum x_i A_i \quad (\text{規則形狀})$$

(5).面積的一次矩(Q)、面積的二次矩(I)與形心三者間之關係(略)

a.力矩 M =物體面積的慣性矩(I_0)

b.合力 R =物體面積的一次矩(Q_0)

c.形心 $\bar{y}_p = \frac{M}{R} = \frac{I_0}{Q_0}$

2.平行軸定理

(1)公式：a.面積慣性矩： $I = \bar{I} + A \cdot d^2$

b.質量慣性矩： $I = \bar{I} + m \cdot d^2$

(2)符號的意義：

** (3)解題時注意事項：公式中兩個慣性矩(I)，其中必有一個慣性矩(I)通過物體的形心

3.迴轉半徑(K) 藍翔耀 編授

(1) 定義：a. 面積慣性矩： $K = \sqrt{\frac{I}{A}}$ ， $I = A \cdot K^2$
 b. 質量慣性矩： $K = \sqrt{\frac{I}{m}}$ ， $I = m \cdot K^2$

(2) 符號的意義：

**** (3) 口訣：對那一點 K 就要對那一點 I (必要時用平行軸定理)**

4. 組合物圖的形心與慣性矩

(1). 熟記常見物圖的形心與慣性矩

(2). 重要觀念：

a. 拼圖

b. 定座標(基準點需一致)

c. 實心物體(面積)：取正號

挖空的物體(面積)：取負號

d. 代公式：(a)：形心 $\bar{x} = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i}$ ， $\bar{y} = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i}$ (規則形狀)

(b)：慣性矩 $I = \sum I_i = I_1 + I_2 + I_3 \dots\dots$

其中： $I_i = \bar{I}_i + A_i \cdot d_i^2$

(3). 求組合物圖的慣性矩時：必要時使用平行軸定理

5. 行心的應用

(1). Pappus 定理

***** (2). 樑上的分佈力(均佈負荷)**

(a) 均佈負荷的大小(合力)：等於其均佈負荷所圍區域的面積

(b) 合力的方向：同原來均佈負荷的方向

(c) 合力的作用點：在其均佈負荷所圍區域面積的形心處

(d) 重要觀念：以上觀念僅能用於求解靜力學的問題，即分析剛體時方成立(例如:求反力)；反之，在分析材料力學(非剛體)時則不適用此一觀念(例如：求剪力與彎矩值)。 藍翔耀 編授

(2) 沉體表面的作用力(流體靜力學)

a. 液體對物體表面的壓應力： $p = \gamma_{液} \cdot h_{水深}$

b. 求液體作用於物體表面的作用力：(通式解)

(a). 觀念：水平、垂直個別處理，再合成。

(b). 水平作用力 (R_x)：等於液體對物體表面壓應力所圍區域面積的體積。

(a) 大小： $R_x = (\text{所圍區域面積}) \cdot (\text{板寬})$

(b) 方向：指向物體方向(壓力)

(c) 作用點：所圍區域面積的形心處

(c). 垂直作用力 (R_y)：等於板子正上方液體的重量。

(a) 大小： $R_y = W_{\text{液}} = (\gamma_{\text{液}}) \cdot (\text{板子正上方液體的體積})$

(b) 方向：指向物體方向(壓力)

(c) 作用點：所圍區域面積的形心處

(d). 合成： $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$

<重點十三>：絕對運動與相對運動

1. 絕對運動：

(1) 定義：一運動物體相對於另一靜止物體的運動。即兩個物體，一個在運動另一個處在靜止狀態。

(2) 符號： $\vec{V}_A (= \vec{V}_{A/\text{地}})$ 或 $\vec{V}_B (= \vec{V}_{B/\text{地}})$ (以速度為例)

(2) 應用：

2. 相對運動：

(1) 定義：一運動物體相對於另一運動物體的運動。即兩個物體，均處在運動狀態。

(2) 符號：(a). B 點相對於 A 點的相對速度翻譯成： $\vec{V}_{B/A}$

(b). 由 A 點看(觀察) B 點的速度亦翻譯成： $\vec{V}_{B/A}$

(3)公式： $\vec{v}_{B/A} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$ (以相對速度為例) 藍翔耀 編授

(4)應用： $\vec{v}_{B/A}$ 是指 B 點的速度；乃指由 A 點看(觀察) B 點的速度，既以 A 點為參考點(基準點)。必要時所有的向量就要以該點為出發點 "射出去"。 藍翔耀 編授

<重點十四>：尋找對應角度轉換之幾何關係

1. 熟記 $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ 的 $\sin\theta$ 及 $\cos\theta$ 與 $\tan\theta$ 的數值及直角三角行(3, 4, 5)的角度關係

** 2. 尋找對應角度之轉換關係：若兩條線互相垂直，則其對應的角度(或斜率)，"水平線與垂直線會互換"。 藍翔耀 編授

3. 尋找任意三角形(或力的多邊形圖)某一個角度的方法

----- 畫一條輔助線(水平線或垂直線)，再應用前述 2 的方法將可較易找出其角度值。

**<重點十>：單位轉換時的技巧

1. 非有必要，儘可能養成習慣單位

2. 遇單位須轉換時的技巧：

原數字不理它，"分子換分子，分母換分母"。