材料力學　應變能(strain energy)問題 總整理

1. 定義：(1)通式：是指負荷與變形所圍區域的陰影面積　　藍翔耀　編授

(2)特例(線性關係時)：應變能 U = 三角形面積 $=\frac{1}{2}$負荷 × 變形

$$U=\frac{1}{2}\cdot P\cdot\delta=\frac{P^2\ell}{2AE}\ ,\ (\because\delta=\frac{P\ell}{AE})$$

$$或=\frac{AE\delta^2}{2\ell}\ ,\ (\because P=\frac{AE\delta}{\ell})$$

$$U=\frac{1}{2}\cdot T\cdot\Phi=\frac{T^2\ell}{2GJ}\ ,\ (\because\Phi=\frac{T\ell}{GJ})$$

$$或=\frac{GJ\Phi^2}{2\ell}\ ,\ (\because T=\frac{GJ\Phi}{\ell})$$

$$U=\frac{1}{2}\cdot M\cdot\theta=\frac{M^2\ell}{2EI}\ ,\ (\because\theta=\frac{M\ell}{EI})$$

$$或=\frac{EI\delta^2}{2\ell}\ ,\ (\because M=\frac{EI\theta}{\ell})$$

2.單位體積的應變能(應變能密度)

(1)通式：是指應力與應變所圍區域的陰影面積

(2)特例(線性關係時)：應變能密度 u = 三角形面積 $=\frac{1}{2}$應力 × 應變

3.求解應變能(U)或應變能密度(u)的方法

(1)通式(不規則形狀)：用積分法求出所圍區域的陰影面積

(2)特例(比例限度內)：所圍區域的陰影面積既為三角形的面積

4. 應變能的題型：(1)均勻型

(2)分斷型

(3)積分型(均變型)

*** 5. 應變能的應用

(1).分析變形量的問題(詳見第五章)

(2).求解衝擊負荷的問題(解法同動力學的功能原理)

*** 6. 能量不滅定律　　藍翔耀　編授

(1) 公式：第一狀態之總能量 + 功 = 第二狀態之總能量

$$T_1+V_1+U_1+W_k=T_2+V_2+U_2$$

(2) 其中：第一狀態是指原來的狀態，而

第二狀態是指後來的狀態

(3) 解題時慎選參考基準線，若題意包含桿件之自重時，
此時基準線最好取在桿件的質心處較好解題。

*** 7. 功與能的介紹

(1).動能：(a) 平移之動能 T = $\frac{1}{2}mV^2$

(b) 旋轉之動能 T = $\frac{1}{2}I\omega^2$

*** (c) 質點之動能(僅有平移)

T = $\frac{1}{2}mV^2$

*** (d) 剛體之動能(有平移、有旋轉)

T = $\frac{1}{2}mV_G^2+\frac{1}{2}I_G\omega^2=\frac{1}{2}I_O\omega^2$ (平行軸定理)

(2) 位能：

a. 重力位能(Vg)：

(a)假設基準線：讀者可自行任意假設，方便解題就可；但若考慮物體的自重時最好假設在質心處。(Why?)

(b)公式：Vg =± mgh = ± wh

(c)正負號的選用：物體若在基準線的上方取正號，
在基準線的下方取負號。

(d) 圖例：

b. 彈性位能(Ve)：

(a) 觀念：離開截面(或節點)取正 ~ 拉伸彈簧 ；
指向截面(或節點)取負 ~ 壓縮彈簧

(b)伸長量(變化量)：$\delta(\text{或}x)=\Delta l=l_{\text{後來}}-l_{\text{原來}}$

(c)彈簧力：a. 非線性彈簧： Fs = kX^n (n$\neq$1)
b. 線性彈簧： Fs = k X (n = 1)

(d)彈性位能：a. 定義：Ve = $\int F_s dX$

b. 非線性彈簧：Ve = $\int F_s dX = \frac{1}{n+1}kX^{n+1}$

c. 線性彈簧：Ve = $\int F_s dX = \frac{1}{2}kX^2$

(3) 功 (Work) ：

a. 定義：除了自重外，由於其他的外力所作的功

(a) 平移所作的功 Wk = $\vec{F}\cdot\vec{S}$

(b) 旋轉所作的功 Wk = $\vec{M}\cdot\vec{\theta}$

(c) 質點所作的功(僅有平移) Wk = $\vec{F}\cdot\vec{S}$

(d) 剛體所作的功(有平移、有旋轉) Wk = $\vec{F}\cdot\vec{S}+\vec{M}\cdot\vec{\theta}$

b. 種類：(a)正功：負荷與位移同方向

(b)負功：負荷與位移反方向。例如：滑動摩擦力所作的功

c. 不作功的力有那些

(a)垂直反力不作功(因爲位移爲零)

(b)滾動摩擦力不作功(因爲位移爲零)

(c) 內力不作功(因爲所作的功互相抵消)

(4) 應變能：(請參考前述材料力學介紹)

***(5) 遇外力所作之正功及彈簧有初變形時之注意事項

a.外力所作之正功：(a)當力量作用的方向與動路不平行時

(b)注意正負號：當位能增加時作負功，反之作正功

b. 彈簧有初變形時：

*** 8. 應變能的物理意義：

(1) 應變能(U)：是指負荷與變形所圍區域的陰影面積

(2)應變能密度(u)：是指應力與應變所圍區域的陰影面積

(3)求解應變能(U)或應變能密度(u)的方法

(a)通式(不規則形狀)：用積分法求出所圍區域的陰影面積

(b)特例(比例限度內)：所圍區域的陰影面積既爲三角形的面積

*** 9.求解衝擊負荷問題的步驟

(1)首先要確定題意(How？)

(2)步驟一：引用能量不滅定率(同動力學的功能原理)

(3)步驟二：想像成(重點六)變形量關係找出$P_{\max}$ 與 $\delta_{\max}$之關係

(或$T_{\max}$ 與 $\Phi_{\max}$)、(或$M_{\max}$ 與 $\theta_{\max}$)之關係

(4)步驟三：聯立(1)(2)式，化成變形量關係的一元二次方程式，並依序求得 $\delta_{\max}\rightarrow P_{\max}\rightarrow\sigma_{\max}$(第一章)；或

$\Phi_{\max}\rightarrow T_{\max}\rightarrow\tau_{\max}$(第二章)；或

$\delta_{\max}\rightarrow P_{\max}\rightarrow\sigma_{\max}$(第三章)；或

$\theta_{\max}\rightarrow M_{\max}\rightarrow\sigma_{\max}$(第三章)