材料力學　應力分析 總整理

第一章　拉力、壓力、剪力及變形量的關係

藍翔耀　編授

<重點一>：應力(Stress)

1. 定義

* 2. 應力的種類:

(1).垂直應力(軸向應力) (normal stress)

(2).剪應力 (shear stress)

(3).承應力 (bearing stress)

** 3. 應力的單位

<重點二>：應變 (Strain)

1. 定義

* 2. 應變的種類:

(1).垂直應變：(a)軸向應變(axial strain)

(b)側向應變(lateral strain)

(2).剪應變 (shear strain)

<重點三>：容許應力與安全係數

1. 安全因素：刮痕、颱風(風力)、地震、水災及一些無法預側之因素。
2. 安全因數：(1)定義：F.S. = 破壞應力 / 允許應力

(2)破壞應力的選用：

a. 延性材料：選用" 降服應力 "

b. 脆性材料：選用" 極限應力 "

***<重點四>：三軸向應力、應變之關係

1. 蒲松比(Poisson's ratio)

(1)定義：a. $\upsilon = -\dfrac{\text{側向應變}}{\text{軸向應變}} = -\dfrac{\varepsilon_{\ell at}}{\varepsilon_{axi}}$

b.應用：$\varepsilon_{\ell at} = -\upsilon \cdot \varepsilon_{axi}$

(2)通常： 0 <= ν <= 0.5

2. 三軸向應力、應變之公式

(1)已知應力求應變($\sigma \rightarrow \varepsilon$)

$$\varepsilon_X = \frac{1}{E}[\sigma_X - \upsilon(\sigma_Y + \sigma_Z)]$$

$$\varepsilon_Y = \frac{1}{E}[\sigma_Y - \upsilon(\sigma_X + \sigma_Z)]$$

$$\varepsilon_Z = \frac{1}{E}[\sigma_Z - \upsilon(\sigma_X + \sigma_Y)]$$

(2)已知應變求應力($\varepsilon \to \sigma$)

(a)三維應力

$$\sigma_X = \frac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}[(1-\upsilon)\varepsilon_X + \upsilon(\varepsilon_Y + \varepsilon_Z)]$$

$$\sigma_Y = \frac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}[(1-\upsilon)\varepsilon_Y + \upsilon(\varepsilon_Z + \varepsilon_X)]$$

$$\sigma_Z = \frac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}[(1-\upsilon)\varepsilon_Z + \upsilon(\varepsilon_X + \varepsilon_Y)]$$

(b)二維應力

$$\sigma_X = \frac{E}{(1+\upsilon)(1-\upsilon)}(\varepsilon_X + \upsilon \cdot \varepsilon_Y)$$

$$\sigma_Y = \frac{E}{(1-\upsilon^2)}(\varepsilon_Y + \upsilon \cdot \varepsilon_X)$$

3. 體積應變(dilatation)(又稱膨脹率)： $\varepsilon_V = \varepsilon_X + \varepsilon_Y + \varepsilon_Z$

4. 彈性模數、蒲松比與剪力模數三者之關係： $G = \dfrac{E}{2(1+\upsilon)}$

第二章　　扭　轉 (Torsion)

藍翔耀　編授

**<重點一>：扭矩與彎矩之判別

1. 右手螺旋定則:　藍翔耀　編授
   (1) 四指方向:表示旋向。(例如:順時針或逆時針方向)
   (2) 姆指方向:表示指向。(例如: x、y 或 z 方向)
   (3) 一般之向量是指:指向而非旋向。
2. 扭矩:指向與斷面垂直。(扭矩對材料產生 " 剪應力 ")
3. 彎矩:指向與斷面平行。(彎矩對材料產生 " 垂直應力 ")

<重點二>：應力分析　　藍翔耀　編授

1. 公式推導之討論
   (1) 剪應變(γ)與半徑(ρ)成正比
   (2) 由虎克定律知：剪應力(τ)與剪應變(γ)成正比
   (3) 剪應力(τ)與半徑(ρ)成正比
   (4) 剪應力(τ)之應力分佈圖形
2. 公式(通式)
   (1) 公式: $\tau = \dfrac{T\rho}{J}$
   (2) 符號: T : 扭矩
   ρ : 半徑
   J : 極慣性矩
   τ : 因扭矩所生之剪應力
3. 特例:(1)實心圓軸　藍翔耀　編授

a.最大剪應力

(a)公式：$(\tau_T)_{MAX} = \dfrac{TR}{J} = \dfrac{16T}{\pi d^3}$

(b)發生在外緣處，且整個圓周外表面均承受相同的剪應力

(c)圖形：

b.最小剪應力:(a)公式:(用比的較快)

(b)發生在圓心處

(2)空心圓軸　藍翔耀　編授

a.最大剪應力

(a)公式：$(\tau_T)_{MAX} = \dfrac{16T}{\pi d_o^3} \cdot \dfrac{1}{1-n^4}$ (其中$n = \dfrac{d_i}{d_o}$)

(b)發生在外緣處，且整個圓周外表面均承受相同的剪應力

(c)圖形：

b.最小剪應力:(a)公式：(用比的較快) $\dfrac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}} = \dfrac{r_i}{r_o}$

(b)發生在內緣處

第三章　樑之剪力、彎矩及應力分析

藍翔耀　編授

<重點一>：樑之種類與支座的反作用力

* <重點二>：樑內任一斷面之內負荷(剪力與彎矩)

1. 內負荷之種類:軸向力(N)、剪力(V)與彎矩(M)
2. 內力的正負號

(1)軸向力：離開截面(或節點)取正；指向截面(或節點)取負

(2)剪力：畫在圖形左邊向上爲正，右邊向下爲正(順時針旋轉爲正)

畫在圖形左邊向下爲負，右邊向上爲負(逆時針旋轉爲負)

(3)彎矩：使上方凹下爲正，凸出爲負

3. 內負荷之求法:　藍翔耀　編授

(1) 軸向力:由自由體圖取 $\Sigma F x = 0$ 可求解

(2) 剪力:由自由體圖取 $\Sigma F y = 0$ 可求解

(3) 彎矩:求某一點之彎矩就對該點取力矩(只取該點的左側或右側)

* <重點三>：剪力圖與彎矩圖　　　藍翔耀　編授

1. 均佈載重、剪力與彎矩三者間之關系

(1) 三者間之關系公式

a. $q_x \xrightarrow{\text{積分}} V_x \xrightarrow{\text{積分}} M_x \xrightarrow{\text{積分}} \theta_x\,(\text{傾角}) \xrightarrow{\text{積分}} y_x\,(\text{撓度})$

b. $q_x \xleftarrow[\text{微分}]{} V_x \xleftarrow[\text{微分}]{} M_x \xleftarrow[\text{微分}]{} \theta_x\,(\text{傾角}) \xleftarrow[\text{微分}]{} y_x\,(\text{撓度})$

(2) 均佈載重、剪力二者間之關系

a. 兩點間剪力值的變化量 = 兩點間均佈負荷的面積和

$$V_{B/A} = V_B - V_A = \int_A^B q_x\, dX$$

b. 下一點的剪力值 = 前一點的剪力值 + 兩點間均佈負荷的面積和

$$V_B = V_A + \int_A^B q_x\, dX$$

(3) 剪力與彎矩二者間之關系

a. 兩點間彎矩值的變化量 = 兩點間剪力圖的面積和

$$M_{B/A} = M_B - M_A = \int_A^B V_x\, dX$$

b. 下一點的彎矩值 = 前一點的彎矩值 + 兩點間剪力圖的面積和

$$M_B = M_A + \int_A^B V_x\, dX$$

2.剪力圖與彎矩圖

(1)面積法(分段點的處理)

a.畫剪力圖時　　藍翔耀　編授

(a) 遇集中彎矩(M)作用：不理他

(b) 遇集中力量(P)作用：會隨著力量(P)的方向上下

(c) 遇均佈負荷(q)作用：下一點的剪力值 = 前一點的剪力值 + 兩點間均佈負荷的面積和；既 $V_B = V_A + \int_A^B q_x \, dX$

(d) 兩點間無外力作用：用一條水平線相連

b.畫彎矩圖時　　藍翔耀　編授

(a) 遇集中彎矩(M)作用：會隨著彎矩(M)的方向上下(口訣)

(b) 遇集中力量(P)、均佈負荷(q)或兩點間無外力作用：

下一點的彎矩值 = 前一點的彎矩值 + 兩點間剪力圖的面積和；

既 $M_B = M_A + \int_A^B V_x \, dX$

** c.曲線(水平直線、斜直線與二次曲線)變化的方向

(2) 奇異函數法(請參考第五章)

(3) 熟記基本簡支樑與懸臂樑之剪力圖、彎矩圖及$V_{\max}$ 與 $M_{\max}$之值

3. 樑之部份彎矩圖　　藍翔耀　編授

(1) 欲求某一點之彎矩就以該點為插入點

(2) 以該點為插入點視樑為懸臂樑(注意正負號)

* <重點四>：樑之危險斷面　　　藍翔耀　編授

1. 樑之危險斷面必發生在應力最大處(彎矩最大處)，該點之剪力通常為零。即危險斷面必發生在負荷作用處，其可能位置如下：

(1) 負荷為集中力量(P):該點之剪力為零。　藍裕翔　編授

(2) 負荷為均佈負荷(q):該點之剪力為零。

(3) 負荷為集中力偶(M):該點之剪力可不為零。

2. 題型　　藍翔耀　編授

(1) 固定負荷

(2) 移動負荷

**<重點五>：樑之應力分析　　藍翔耀　編授

(一). 純彎矩

1. 公式推導之討論　藍翔耀　編授

** (1) 中立軸：總長度沒有改變的軸，該軸線上之應力值必為零。

(2) 軸向應變(ε)與距中立軸之距離(y)成正比

(3) 由虎克定律知：軸向應力(σ)與軸向應變(ε)成正比

(4) 軸向應力(σ)與距中立軸之距離(y)成正比

(5) 軸向應力(σ)之應力分佈圖形

2. 公式(通式)：　　藍翔耀　編授

(1) 公式: $\sigma_X = \dfrac{M_Z \cdot Y}{I_Z}$

(2) 符號: Mz : 繞 Z 軸旋轉之彎矩

y　: 距中立軸之距離

Iz : 繞 Z 軸旋轉之慣性矩

σx: 因彎矩所生延 X 軸方向之垂直應力

(3) 代公式時注意 X、Y、Z 三軸之循還　藍裕翔　編授

3. 特例:(1)實心圓軸

a.最大垂直應力

(a)公式：$(\sigma_M)_{\max} = \dfrac{MC}{I} = \dfrac{32M}{\pi d^3}$

(b)發生在距中立軸最遠之外緣處，但在圓周外表面，上、下、左、右四個點，其中對應的兩個點有值而另兩個點沒有值

(c)圖形：

b.最小垂直應力:(a)公式:(用比的較快)

(b)發生在中立軸處

(2)空心圓軸　　　藍翔耀　編授

a.最大垂直應力

(a)公式：$(\sigma_M)_{\max} = \dfrac{32M}{\pi d_o^3} \cdot \dfrac{1}{1-n^4}$ (其中$n = \dfrac{d_i}{d_o}$)

(b)發生在距中立軸最遠之外緣處，但在圓周外表面，上、下、左、右四個點，其中對應的兩個點有值而另兩個點沒有值

(c) 圖形：

b.最小垂直應力:(a)公式：(用比的較快) $\dfrac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = \dfrac{r_i}{r_o}$

(b)發生在距中立軸最近之內緣處

***(二). 側向剪應力　　藍翔耀　編授

1. 公式: $\tau = \dfrac{VQ}{bI}$

2. 符號: τ: 所欲求之橫斷面上所承受之剪應力

V: 樑上所欲求之橫斷面上所承受之剪力值

～其值可由剪力圖中獲得

Q: 樑之橫斷面上，從所欲求之位置至邊緣所圍區域面積
對形心軸之一次矩。 藍翔耀 編授

b: 樑之橫斷面上，所欲求位置之寬度

I: 整個橫斷面，對形心軸之慣性矩

3. 特例:

(1) 矩形橫斷面 藍翔耀 編授

a.通式:: $\tau = \dfrac{VQ}{bI} = \dfrac{3V}{2A}(1 - \dfrac{y^2}{C^2})$

b.最大剪應力:(a)其值爲: $\tau_{\max} = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{V}{A}$

(b)發生在 y=0 時，即中立軸處；也就是說矩形斷面因橫向剪力所生之最大剪應力發生在中立軸處，其值爲平均剪應力之 3/2 倍。

c.最小剪應力:(a)其值爲: 零

(b)發生在 y=c 時，即樑之頂部或底部處。

(2) 圓形橫斷面 藍翔耀 編授

a.通式: $\tau = \dfrac{VQ}{bI} = \dfrac{4V}{3A}(1 - \dfrac{y^2}{r^2})$

b.最大剪應力:(a)其值爲: $\tau_{\max} = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{V}{A}$

(b)發生在 y=0 時，即中立軸處；也就是說圓形斷面因橫向剪力所生之最大剪應力發生在中立軸處，其值爲平均剪應力之 4/3 倍。

c.最小剪應力:(a)其值爲: 零

(b)發生在 y=r 時，即樑之外圓處。

第四章　應 力 與 應 變 分 析

****<重點一>：結構上某點元素之受力分析　　　藍翔耀　編授

1.軸向負荷(P)：$\sigma_{av}=\pm\dfrac{P}{A}$

2.純扭矩(T)：(1)公式：$\tau_T=\dfrac{TR}{J}=\dfrac{16T}{\pi d^3}$（實心圓軸），

$$\tau_T=\frac{16T}{\pi d_o^3}\cdot\frac{1}{1-n^4}\text{（空心圓軸},n=\frac{d_i}{d_o}\text{）}$$

**(2)觀念：整個圓周外表面均承受相同的剪應力

3. 純彎矩(M)：(1)公式：$\sigma_M=\dfrac{MC}{I}=\dfrac{32M}{\pi d^3}$（實心圓軸），

$$\sigma_M=\frac{32M}{\pi d_o^3}\cdot\frac{1}{1-n^4}\text{（空心圓軸},n=\frac{d_i}{d_o}\text{）}$$

** (2)觀念：在圓周外表面，上、下、左、右四個點，

其中對應的兩個點有值而另兩個點沒有值

4. 側向剪力：(1)公式：$\tau_V=\dfrac{VQ}{bI}=\dfrac{3}{2}\tau_{av}=\dfrac{3}{2}\dfrac{V}{A}$（矩形斷面），

$$\tau_V=\frac{VQ}{bI}=\frac{4}{3}\tau_{av}=\frac{4}{3}\frac{V}{A}\text{(圓形斷面)}$$

**(2)觀念：在圓周外表面，上、下、左、右四個點，

其中對應的兩個點有值而另兩個點沒有值

5.應力合成：材力第四章莫耳圓的觀念 ~ 材力的最終：既各種應力

狀態的“合成”。

<重點二>：平面應力之轉換　　　藍翔耀　編授

1. 通式：旋轉θ角後的平面應力

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} Cos2\theta + \tau_{xy} Sin2\theta$$

$$\tau_\theta = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} Sin2\theta + \tau_{xy} Cos2\theta$$

2. 互餘應力(互餘原理):互相對應的一組垂直應力相加必相等。

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_\theta + \sigma_\theta{}' = \sigma_{\max} + \sigma_{\min} = \sigma_1 + \sigma_2$$

3. 主應力：(1)定義：a.剪應力爲零

b.垂直應力爲最大或最小時之應力。

(2)公式：$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + (\tau_{xy})^2}$

(3)主平面角(θ_p)：$Tan2\theta_P = \frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$

4. 最大剪應力：(1)定義：a.剪應力爲最大

b.當時之垂直應力爲平均應力。

(2)公式：$\tau_{\max} = \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + (\tau_{xy})^2}$

(3) 剪平面角(θ_τ)：$\theta_\tau + \theta_p = 45^o$(但要注意旋轉方向)

5. 特例：解題觀念：記住前述公式，然後把沒有的值去掉或補零

(1)雙軸向應力時：(只有σ_x及σ_y,而$\tau_{xy}=0$)

(a) $\sigma_{1,2}=\dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+(0)^2}=\dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}$ ； $\therefore\ \sigma_1=\sigma_x,\sigma_2=\sigma_y$

(b) $Tan2\theta_P=\dfrac{\tau_{xy}}{\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}}=\dfrac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}=0$ ， $\therefore 2\theta_p=0^o\Rightarrow\ \theta_{p=}0^o$

(c) $\tau_{\max}=\sqrt{(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+(0)^2}=\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}$ ，$\because\ \theta_p+\theta_\tau=45^o\Rightarrow\therefore\ \theta_\tau=45^o$

(2)單軸向應力時：(只有σ_x,而$\sigma_y=0,\tau_{xy}=0$)

(a) $\sigma_1=\sigma_x$， $\sigma_2=\sigma_y=0$ ，(b) $2\theta_p=0^o\Rightarrow\ \theta_{p=}0^o$

(c) $\tau_{\max}=\sqrt{(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+(0)^2}=\dfrac{\sigma_x}{2}$ ，$\because\ \theta_p+\theta_\tau=45^o\Rightarrow\therefore\ \theta_\tau=45^o$

(3)純剪應力時：(只有τ_{xy},而$\sigma_x=\sigma_y=0$)

(a) $\sigma_{1,2}=\dfrac{0+0}{2}\pm\sqrt{(\dfrac{0-0}{2})^2+(\tau_{xy})^2}=\pm\tau_{xy}$ ，$\therefore\ \sigma_1=+\tau_{xy},\sigma_2=-\tau_{xy}$

(b) $Tan2\theta_P=\dfrac{\tau_{xy}}{\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}}=\dfrac{2\tau_{xy}}{0-0}=\infty$ ， $\therefore 2\theta_p=90^o\Rightarrow\ \theta_{p=}45^o$

(c) $\tau_{\max}=\sqrt{(\dfrac{0-0}{2})^2+(\tau_{xy})^2}=\tau_{xy}$ ，$\because\ \theta_p+\theta_\tau=45^o\Rightarrow\therefore\ \theta_\tau=0^o$

6.討論：　藍翔耀　編授

當讀者在分析材料是被何種應力破壞時(拉力、壓力、剪力)，切記不可只做完第一章、第二章或第三章之基本應力之元素分析就據下結論來加以判斷，必須經由第四章之應力合成再找出$(\sigma_t)_{\max}, (\sigma_c)_{\max}$ 與 $\tau_{\max}$ 最後再檢查材料之機械性質才能下結論。其步驟如下

(1)取截面的自由體圖，找出該截面之受力型態(負載)

(2)根據截面之受力型態(負載)，輔以第一章、第二章或第三章之基本應力分析公式找出該元素之各種應力狀態(注意正負號)

(3)根據第四章應力合成之公式找出該元素在承受負載(load)時之$(\sigma_t)_{\max}, (\sigma_c)_{\max}$ 與 $\tau_{\max}$ 值　藍翔耀　編授

(4)檢查材料之機械性質，看所求出之三個極值$(\sigma_t)_{\max}, (\sigma_c)_{\max}$ 與 $\tau_{\max}$ 何者最先接近材料之破壞值，則材料即爲該種應力所破壞。

(脆性材料：$\sigma_t < \tau < \sigma_c$)

例如：一粉筆承受一扭矩作用而破壞，請問粉筆是被哪一種應力所破壞，拉應力、壓應力或剪應力，爲什麼？

解：(1) 基本觀念：粉筆是屬於脆性材料，而脆性材料的特性爲耐壓而不耐拉，$\therefore\ \sigma_c > \tau_{xy} > \sigma_t$ ……………………. (1)

(2)粉筆只承受一扭矩作用，所以爲純剪的問題

$\therefore\ \sigma_1 = (\sigma_t)_{\max} = +\tau_{xy}, \sigma_2 = (\sigma_c)_{\max} = -\tau_{xy}$ 且 $\tau_{\max} = \tau_{xy}$ ….. (2)

(3)由**(1)(2)**式知粉筆是被「拉應力」所破壞

< 重點三>莫耳圓

1.座標定義：**(1)Timoshenko** 角度θ 以逆時真旋轉爲

(2) Beer Johnston 角度θ 以順時真旋轉爲正

2.已知平面應力 σ_x ，σ_y ，τ_{xy} 之值

3.圓心座標 $(\sigma_{av}\ ,\ 0\ )=(\dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\ ,\ 0\ )$； 半徑 $R=\sqrt{(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+(\tau_{xy})^2}$

4.零度開始的位置**(**即**A**點座標**)**：$(\sigma_x\ ,\ +\tau_{xy})$

5. 90度的位置**(**即**B**點座標**)**：$(\sigma_y\ ,\ -\tau_{xy})$

6. 主應力： $\sigma_{1,2}=\sigma_{av}\pm R=\dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+(\tau_{xy})^2}$

7. 最大剪應力：$\tau_{\max}=R=\sqrt{(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+(\tau_{xy})^2}$

$$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2$$
$$= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

(b)求主應力(代公式) 藍翔耀　編授

公式：$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$　，　可求出 σ_1 , σ_2 , σ_3

(2)方法二：求特徵值(工數)　藍翔耀　編授

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}-\sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy}-\sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz}-\sigma \end{bmatrix} = 0$$

，　可求出 σ_1 , σ_2 , σ_3

(3) 最大剪應力 $\tau_{\max}$ (三軸向莫耳圓)

$$\tau_{\max} = \max\left[\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\ ,\ \frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\ ,\ \frac{\sigma_3-\sigma_1}{2}\right]$$

例題：　藍翔耀　編授

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & -30 \\ 0 & -30 & -50 \end{bmatrix}$$

，求主應力　σ_1 , σ_2 , σ_3

解：

(1) 求主應力(求特徵值)

$$\begin{vmatrix} 200-\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 1200-\sigma & -30 \\ 0 & -30 & -50-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

(200 - σ) [(100 - σ)(-50 - σ) – (-30)(-30)] = 0

(200 - σ) [$\sigma^2 - 50\sigma - 500 - 900$] = 0

$\sigma_1 = 200$ ， $\sigma_2 = 105.77$ ， $\sigma_3 = -55.77$

(2) 求最大剪應力

$$\tau_{\max} = \max\left[\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2} \ , \ \frac{\sigma_2-\sigma_3}{2} \ , \ \frac{\sigma_3-\sigma_1}{2}\right] = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

$$= \frac{105.77-(-55.77)}{2} = 80.77\ Mpa$$

**<重點三>：三軸向應力分析　　藍翔耀　編授

1. 三軸向應力之莫耳圓
2. 三軸向應力時之最大剪應力
   (1) 觀念:最大剪應力 = 兩兩相減取其最大值再除以 2
   (2) 公式： $\tau_{all} = \tau_{\max} = MAX\left[\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2},\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2},\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\right]$

3.使用時機：薄壁容器求解最大剪應力時

***<重點四>：薄壁容器之應力分析　藍翔耀　編授

1. 條件：(1)內半徑(r)需大於管厚(t) 20倍以上
   (2)內壓力需大於外壓力　藍翔耀　編授
2. 通式： $\frac{\sigma_1}{r_1}+\frac{\sigma_2}{r_2}=\frac{p}{t}$
3. 題型：(1) 圓筒型：a. 周界應力(hoop stress)　$\sigma_1 = \frac{pr}{t}$

   b. 縱向應力(axial stress)　$\sigma_2 = \frac{\sigma_1}{2} = \frac{pr}{2t}$

   (2) 球型　：a. 周界應力(hoop stress)　$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2t}$

   藍翔耀　編授　　b. 縱向應力(axial stress)　σ_2
4. 周界應力 ＞　縱向應力 (σ_1 ＞ σ_2)
5. 代公式時 r 是指 " 內半徑 "　　藍翔耀　編授
6. 兩種應力落點之位置(物裡意義) --- 配合機械設計之鉚接問題時。
7. 薄壁容器求解最大剪應力時 " 必須考慮三軸向應力分析 "

***<重點五>：三軸向應力、應變之關係　藍翔耀　編授

2.　蒲松比(Poisson’s ratio)

(1)定義：a. $\upsilon = -\dfrac{側向應變}{軸向應變} = -\dfrac{\varepsilon_{\ell at}}{\varepsilon_{axi}}$

b.應用：$\varepsilon_{\ell at} = -\upsilon \cdot \varepsilon_{axi}$

(2)通常： 0 <= ν <= 0.5

3. 三軸向應力、應變之公式

(3)已知應力求應變($\sigma \rightarrow \varepsilon$)

$$\varepsilon_X = \frac{1}{E}[\sigma_X - \upsilon(\sigma_Y + \sigma_Z)]$$

$$\varepsilon_Y = \frac{1}{E}[\sigma_Y - \upsilon(\sigma_X + \sigma_Z)]$$

$$\varepsilon_Z = \frac{1}{E}[\sigma_Z - \upsilon(\sigma_X + \sigma_Y)]$$

(4)已知應變求應力($\varepsilon \rightarrow \sigma$)

(a)三維應力

$$\sigma_X = \frac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}[(1-\upsilon)\varepsilon_X + \upsilon(\varepsilon_Y + \varepsilon_Z)]$$

$$\sigma_Y = \frac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}[(1-\upsilon)\varepsilon_Y + \upsilon(\varepsilon_Z + \varepsilon_X)]$$

$$\sigma_Z = \frac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}[(1-\upsilon)\varepsilon_Z + \upsilon(\varepsilon_X + \varepsilon_Y)]$$

(b)二維應力

$$\sigma_X = \frac{E}{(1+\upsilon)(1-\upsilon)}(\varepsilon_X + \upsilon \cdot \varepsilon_Y)$$

$$\sigma_Y = \frac{E}{(1-\upsilon^2)}(\varepsilon_Y + \upsilon \cdot \varepsilon_X)$$ 藍翔耀 編授

3. 體積應變(dilatation)(又稱膨脹率)：$\varepsilon_V = \varepsilon_X + \varepsilon_Y + \varepsilon_Z$

4. 彈性模數、蒲松比與剪力模數三者之關係：$G = \dfrac{E}{2(1+\upsilon)}$

*** <重點六>：平面應變 (Plane strain)

1. 定義：$\varepsilon_z = 0$, $\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$, 且 $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ (共有5項數據爲零)

2. 正負號(符號)之規定

(1)垂直應變：伸長爲正；縮短爲負

(2)剪應變：使角度增加爲正；角度減少爲負

3. 平面應變之轉換

(1)符號變換 藍翔耀 編授

a. 平面應力　　平面應變

$$\sigma_x \leftrightarrow \varepsilon_x$$

$$\sigma_y \leftrightarrow \varepsilon_y$$

$$\tau_{xy} \leftrightarrow \frac{1}{2}\gamma_{xy}$$

b. 張量表示式　　一般表示式

$$\varepsilon_{xx} \leftrightarrow \varepsilon_x$$

$$\varepsilon_{yy} \leftrightarrow \varepsilon_y$$

$$\varepsilon_{xy} \leftrightarrow \frac{1}{2}\gamma_{xy}$$

(2)公式：經過符號變換後平面應力的所有公式在平面應變均適用

(a) $$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

(b) $$Tan\ 2\theta_P = \frac{\frac{\gamma_{xy}}{2}}{\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}} = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

(c) $$\frac{\gamma_{\max}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

(3)解題觀念

*** a.基本觀念

(a)垂直應變(ε_x)會影響側方向的值($\varepsilon_y = -\upsilon \cdot \varepsilon_x$)

(b)剪應變代表角度，不會影響側方向的值

*** b.找出 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ 的數據　　藍翊耀　編授

型一：有三片應變規(strain gage) ~ 直接代公式

型二：只有二片應變規(例如 $\varepsilon_x, \varepsilon_\theta$) 藍翔耀 編授

(a)由$\varepsilon_x \to \varepsilon_y$ ： $\varepsilon_y = -\upsilon \cdot \varepsilon_x$

(b)由負荷(P或T)作用得$\tau_{xy} \to \gamma_{xy}$

(c)由$\varepsilon_\theta \to$得所需的結果(或聯立(b)(c)式)

型三：只有一片應變規(例如 ε_x 或 ε_θ)

(a)單軸向應力：由$\varepsilon_x \to \varepsilon_y$ ； $\varepsilon_y = -\upsilon \cdot \varepsilon_x$

此時 $\tau_{xy} = 0 \to \gamma_{xy} = 0$

(b) 純剪：由$\varepsilon_\theta \to \varepsilon_{xy} \to \tau_{xy} \to$求得負荷(P或T)

此時 $\sigma_y = \sigma_y = 0 \to \varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$

*** c.求主應變($\varepsilon_1, \varepsilon_2$)或最大剪應變($\gamma_{\max}$) ~ 代公式

*** d.求負載 ($\varepsilon \to \sigma \to P$(或 T 或 M)) 藍翔耀 編授

(a)垂直應力 $\sigma_x = \dfrac{1}{1-\upsilon^2}(\varepsilon_x + \upsilon\, \varepsilon_y)$

$\sigma_y = \dfrac{1}{1-\upsilon^2}(\varepsilon_y + \upsilon\, \varepsilon_x)$

(b)剪應力 $\tau_{xy} = G\, \gamma_{xy}$ ，其中 $G = \dfrac{E}{2(1+\upsilon)}$

*** 4. 畫出變形圖(主應變、最大剪應變或任意位置時) ~ 多練習

<重點七>：延性材料之降服理論　　　藍翔耀　編授

1.種類

(1) 最大垂直應力理論(Maximun normal stress theory)

**** (2) 最大剪應力理論(Maximun shear stress theory) (Tresca 理論)

**** (3) 最大剪力能理論(Maximun shear energy theory) (von Mises Hencky)

最大畸變能(變形能)理論(Maximun distortion energy theory)

(4) 最大應變能理論(Maximun strain energy theory)

2.最大剪應力理論 (Tresca 理論) ~ 想像成材力莫耳圓　　藍翔耀　編授

(1) 以最大剪應力爲主。

(2) 定義及名詞：當最大剪應力達到單軸向拉伸的剪應力時，材料開始產生降服

(3) 允許剪應力 = 最大剪應力 = 兩兩相減取其最大值再除以 2

$$\tau_{all} = \tau_{\max} = MAX\left[\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2},\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2},\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\right]$$

step 1.先找主應力：$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$　(假設$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$)

step 2.允許垂直應力：$\sigma_{all} = MAX[(\sigma_1-\sigma_2),(\sigma_2-\sigma_3),(\sigma_1-\sigma_3)]$

step 3.允許剪應力：$\tau_{all} = \frac{1}{2}\sigma_{all}$　(特別注意$\frac{1}{2}$的數據)

(4) 安全因數FS = 降伏剪強度 / 允許剪應力 = $\frac{\tau_{yp}}{\tau_{all}}$

3.最大變形能理論 (von Mises；Hencky 理論)

(1) 以最大允許垂直應力爲主。　藍翔耀　編授

(2) 定義及名詞：當允許垂直應力等於單軸向拉伸之降服應力時材料開始產生降服

(3) 允許垂直應力的平方 = 兩兩相減的平方和再除以 2

a. 三軸向應力時(通式)

$$\sigma_{all}^2 = \frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2]$$

step 1.先找主應力： $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (假設 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$)

step 2.允許垂直應力： $\sigma_{all} = \frac{1}{\sqrt{2}}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2]^{\frac{1}{2}}$

b.雙軸向應力時 藍翔耀 編授

公式：.允許垂直應力= $\sigma_{all}^2 = \sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2$

c.純剪時：.允許剪應力= $\tau_{all} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_{all} = 0.577\sigma_{all}$ (特別注意0.577的數據)

d.平面應力之通式： $\sigma_{all}^2 = \sigma_{x1}^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2$

(4) 安全因數FS = 降伏強度 / 允許垂直應力 = $\dfrac{\sigma_{yp}}{\sigma_{all}}$

4 三維應力求主應力、最大剪應力的方法

已知：$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$ ，求主應力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

(1)方法一：應力不變量 (Invariant stress)

(a)先求應力不變量 藍翔耀 編授

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_y - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$$
$$= \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2$$
$$= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

(b)求主應力(代公式) 藍翔耀 編授

公式： $\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$ ， 可求出 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

(2)方法二：求特徵值(工數)　藍翔耀　編授

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}-\sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy}-\sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz}-\sigma \end{bmatrix} = 0$$

，　可求出 σ_1 , σ_2 , σ_3

(3) 最大剪應力 $\tau_{\max}$ (三軸向莫耳圓)

$$\tau_{\max} = \max\left[\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2} \ , \ \frac{\sigma_2-\sigma_3}{2} \ , \ \frac{\sigma_3-\sigma_1}{2}\right]$$

例題：　藍翔耀　編授

$$\left[\sigma_{i\,j}\right] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & -30 \\ 0 & -30 & -50 \end{bmatrix}$$

，求主應力 σ_1 , σ_2 , σ_3

解：

(1) 求主應力(求特徵值)

$$\begin{vmatrix} 200-\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 1200-\sigma & -30 \\ 0 & -30 & -50-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

$(200 - \sigma)\ [(100 - \sigma)(-50 - \sigma) - (-30)(-30)] = 0$

$(200 - \sigma)\ [\sigma^2 - 50\sigma - 500 - 900\ ] = 0$

$\sigma_1 = 200$, $\sigma_2 = 105.77$, $\sigma_3 = -55.77$

(2) 求最大剪應力

$$\tau_{\max} = \max\left[\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2} \ , \ \frac{\sigma_2-\sigma_3}{2} \ , \ \frac{\sigma_3-\sigma_1}{2}\right] = \frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}$$

$$= \frac{105.77-(-55.77)}{2} = 80.77\ Mpa$$