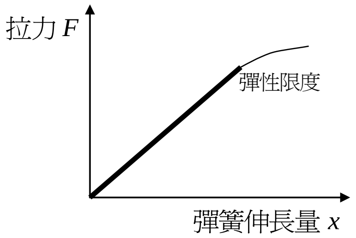
第 3-1 節 力的測量

1. 力的三要素：大小、方向、施力點
2. 力對物體作用與影響：
   (1)力能使物體產生形變，如施力使彈簧伸長或壓縮。
   (2)力能改變物體的運動狀態，如施力推一物體使其速度變快。
3. 當一個物體同時受數力作用時，若其合力為零，稱為靜力平衡。

力的測量



虎克定律：

在彈性限度內，拉力 F 與彈簧伸長量 x 成正比，即 F=kx。圖中直線斜率 k 為彈力常數，k 越大，表示越不容易使彈簧形變； k 越小，表示越容易使彈簧形變。彈力常數 k 與種類、組成、長度、截面積有關。

單位：

F	x	k
N	m	N/m
Kgw	m	Kgw/m
gw	cm	gw/cm

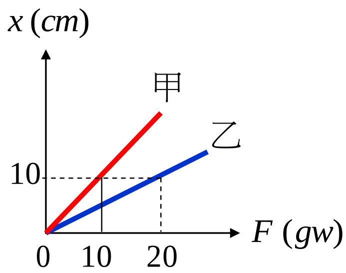
例題：

平常用的懸吊式彈簧秤，若取下平放。一人在一端用一公斤重力拉，另一人在秤鉤一端也用一公斤重力拉。問此彈簧秤上的讀數為何？

[解析]：

1 *Kgw*

例題：



如圖為兩條彈簧的彈力與形變的圖形，則

(A)甲的斜率較大，因此甲的彈力常數比乙大

(B)乙的力常數為 1/3 公克重/公分

(C)甲的力常數為 1 公克重/公分

(D)彈力常數較小者，表示該彈簧不易伸長或壓縮

[解析]：

(C)

例題：

理想彈簧之彈力常數 100 N/m，長度 100cm，則其兩端各施以 10 N 的反方向力時，與彈簧一端固定，他端施以 10 N 之拉力時，彈簧長度分別為何？

[解析]：

$$F = kx \quad \Rightarrow \quad 10 = 100x \quad \Rightarrow \quad x = 0.1\,(m) = 10\,(cm)$$

彈簧長度皆為 $100 + 10 = 110\,(cm)$

例題：

彈簧下端掛一秤盤，上面放置砝碼做虎克定律實驗，每個砝碼質量均為 10 公克，實驗數據如表所示，則

(1)只懸掛秤盤時，彈簧的伸長量為多少？

(2)當砝碼數為 5 個時，彈簧的伸長量為多少？

(3)秤盤的質量為若干？

砝碼個數	2	4	6	8	10
彈簧伸長量（cm）	1.8	2.4	3.0	3.6	4.2

[解析]： 秤盤的質量為 M ，彈簧彈力常數為 k

$$\begin{cases}(M+20)g=1.8k\\(M+40)g=2.4k\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}M=40\\k=100g/3\end{cases}$$

(1)只懸掛秤盤時 $Mg=kx_1 \Rightarrow x_1=1.2\,(cm)$

(2)當砝碼數為 5 個時 $(M+50)g=kx_2 \Rightarrow x_2=2.7\,(cm)$

(3) $M=40\,(g)$

砝碼個數	2	4	6	8	10
彈簧伸長量（cm）	1.8	2.4	3.0	3.6	4.2

例題：

某生測得彈簧全長與外力關係，如表所示，則

(1)彈簧不受外力時的全長為多少？

(2)彈簧受外力 10 公克重，彈簧全長為多少？

外力(gw)	3	6	9	12	15
全長(cm)	8.8	9.2	9.6	10.0	10.4

[解析]： 設彈簧不受外力時的全長為

(1) $\dfrac{3}{6}=\dfrac{8.8-L}{9.2-L} \Rightarrow L=8.4\,(cm)$

(2) $\dfrac{3}{10}=\dfrac{8.8-8.4}{L'-8.4} \Rightarrow L'=9.7\,(cm)$

例題：

在彈性限度內將彈簧之一端固定，另一端繫 24 g 之物體，則全長變為 24 cm；若改掛 12 g 之物體，則全長變為 21 cm。當彈簧全長為 22 cm 時，物體之質量為多少？

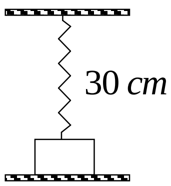
［解析］：

設彈簧原長為 L　　$\dfrac{24}{12}=\dfrac{24-L}{21-L} \Rightarrow L=18$

$$\frac{24}{m}=\frac{24-18}{22-18} \Rightarrow m=16\,(g)$$

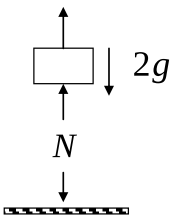
例題：

一彈簧長 20 cm，彈力常數為 100 N/m，一端懸於天花板，另一端掛 2 Kg 的重錘，如圖所示。當平衡時，彈簧長度為 30 cm，設 g=10 m/s^2，則重物加給地板的作用力大小為多少？



［解析］：

$kx=100\times0.1=10\,(N)$



$$N+10-2g=0 \Rightarrow N=10+2g=30\,(N)$$

例題：

當一彈簧受重力各為 0.5 Kg、1 Kg、1.5 Kg、2.0 Kg 及 2.5 Kg 時，彈簧的伸長量分別為 0.2 cm、0.4 cm、0.6 cm、0.75 cm 及 0.9 cm。求

(1)此彈簧可用來度量力的最大值為多少公斤？

(2)當一力作用在彈簧上，使它伸長了 0.55 cm，則此力大小為多少公斤重？

[解析]：

(1) $k=\frac{0.5}{0.2}=\frac{1}{0.4}=\frac{1.5}{0.6}\neq\frac{2}{0.75}$ 力的最大值：1.5 Kg

(2) $F=kx=\frac{0.5}{0.2}\times 0.55=1.38\ (Kgw)$

例題：

一均勻彈簧水平放置，未受力時長度為 1 公尺，在其上依次以 1 厘米之間隔畫上刻度 0、1、2、…、99、100。設此彈簧遵守虎克定律，今將此彈簧 0 刻度的一端掛在天花板上，另一端自然下垂，平衡時測得刻度 50 與 51 相距 1.1 厘米，則下列各項中兩刻度間距離最接近 2.3 厘米的是

(A) 0 與 2 (B) 24 與 26 (C) 49 與 51 (D) 74 與 76

[解析]： **(B)**

因 50~51 間距為 1，現長度為 1.1 cm，伸長量 0.1 cm，可視為負擔整條彈簧 50/100 的重量。題目中兩刻度接近 2.3 cm，相當於每刻度伸長 0.15 cm

$\frac{50}{x}=\frac{0.1}{0.15}\Rightarrow x=75$ 可視為負擔整條彈簧 75/100 的重量應在刻度 25 附近

例題：

一均勻彈簧水平放置，未受力時長度為 1 公尺，在其上依次以 1 厘米之間隔畫上刻度 0、1、2、…、99、100。設此彈簧遵守虎克定律，今將此彈簧 0 刻度的一端掛在天花板上，另一端自然下垂，平衡時測得刻度 50 與 51 相距 1.1 厘米，則下列各項中兩刻度間距離最接近 2.1 厘米的是
(A) 0 與 2 (B) 24 與 26 (C) 49 與 51 (D) 74 與 76

［解析］：

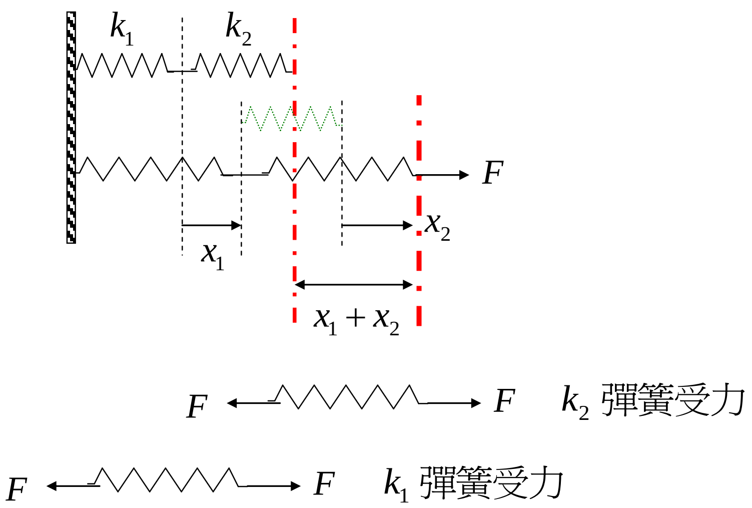
$\frac{50}{x}=\frac{0.1}{0.05} \Rightarrow x=25$　可視為負擔整條彈簧 25/100 的重量應在刻度 75 附近

(D)

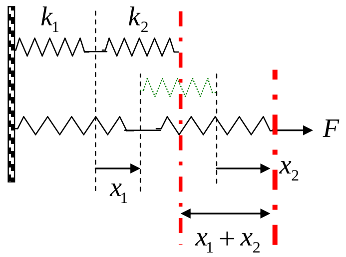
彈簧的串聯

(1)各彈簧受力相等

(2)各彈簧變形量的和等於總變形量

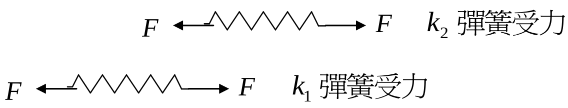


(3)等效彈簧的彈力常數 k_{eq}

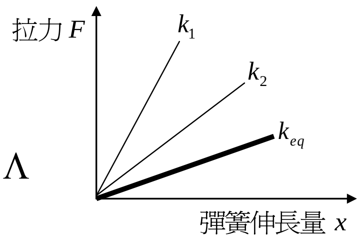


$$x_1=\frac{F}{k_1} \qquad x_2=\frac{F}{k_2}$$

$$x=x_1+x_2=\frac{F}{k_1}+\frac{F}{k_2}=\frac{F}{k_{eq}}$$



$$\boxed{\frac{1}{k_{eq}}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}}$$



多條彈簧的串聯：$\dfrac{1}{k_{eq}}=\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}+\dfrac{1}{k_3}+\dfrac{1}{k_4}+\Lambda$

(a)串聯後，等效彈簧的彈力常數小於任一條單獨彈簧。

(b)串聯後，彈力常數減小，表示彈簧容易拉長或壓縮。

(4) n 條相同且彈力常數為 k 的彈簧串聯，等效彈力常數

$$\frac{1}{k_{eq}}=\frac{1}{k}+\frac{1}{k}+\Lambda+\frac{1}{k}=\frac{n}{k} \quad \Rightarrow \quad k_{eq}=\frac{k}{n}$$

(5)同型的彈簧，彈力常數與長度成反比。

［證明］：

長度 L_1 的彈簧可視為共有 L_1 段長度為 1 且彈力常數為 k 的彈簧所組成，因此長度 L_1 的彈簧其彈力常數 k_{L1} 為 $k_{L1}=\dfrac{k}{L_1}$

長度 L_2 的彈簧可視為共有 L_2 段長度為 1 且彈力常數為 k 的彈簧所組成，因此長度 L_2 的彈簧其彈力常數 k_{L2} 為 $k_{L2}=\dfrac{k}{L_2}$

則 $k_{L1}:k_{L2}=\dfrac{k}{L_1}:\dfrac{k}{L_2}=L_2:L_1$

(6)將彈力常數為 k 的彈簧分成 n 段，則每段的彈力常數為

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{k'}+\frac{1}{k'}+\Lambda+\frac{1}{k'}=\frac{n}{k'} \quad \Rightarrow \quad k'=nk$$

(7)將彈力常數為 k 的彈簧分成長度比 m：n 的兩段，則彈力常數分別為 $k_m=\frac{m+n}{m}k$ 、 $k_n=\frac{m+n}{n}k$ 。

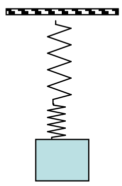
[證明]：

設原彈簧 L ，則兩彈簧長分別為 $\frac{m}{m+n}L$ 及 $\frac{n}{m+n}L$ 。因同型的彈簧，彈力常數與長度成反比，則

$$k:k_m:k_n=\frac{1}{L}:\frac{1}{\frac{m}{m+n}L}:\frac{1}{\frac{m}{m+n}L}=1:\frac{m+n}{m}:\frac{m+n}{n}$$

$$\therefore \quad k_m=\frac{m+n}{m}k \qquad k_n=\frac{m+n}{n}k$$

例題：



10 Kg 的物體被兩個彈簧秤吊起，如圖所示。設彈簧秤的重量不計，則

(A)每個彈簧秤的讀數均為 5 Kg

(B)每個彈簧秤的讀數均為 10 Kg

(C)上彈簧秤的讀數為零，下彈簧秤的讀數為 10 Kg

(D)下彈簧秤的讀數為零，上彈簧秤的讀數為 10 Kg

(E)兩彈簧的讀數均為 0 至 10 Kg 間的某值，但和為 10 Kg

[解析]：

(B)

例題：

圖中有三條力常數分別為 3k、2k、k 之彈簧 a、b、c 吊三個重物為 W 之物體而呈平衡，設彈簧重量不計，則

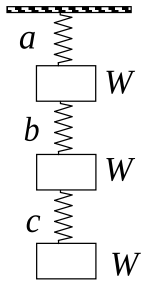
(A)彈簧 a 伸長 W/3k

(B)彈簧 b 的彈力為 2W

(C)總伸長量為 W/k

(D)每條彈簧的彈力皆為 W

(E)每條彈簧的伸長量皆為 W/3k



[解析]：

[解析]： **(B)**

物塊 c： $F_3 - W = 0 \;\Rightarrow\; F_3 = W$

彈簧 c 伸長： $W = kx_3 \;\Rightarrow\; x_3 = \dfrac{W}{k}$

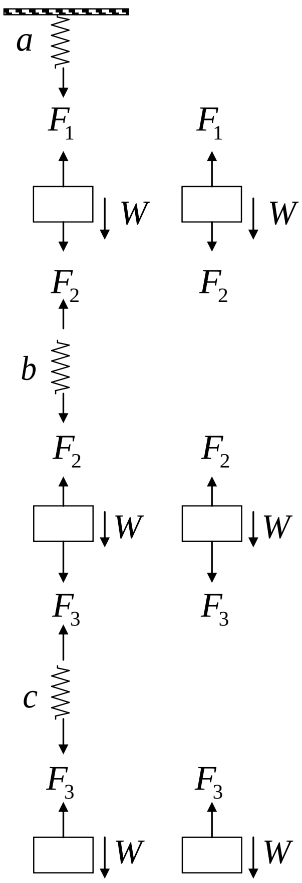
物塊 b： $F_2 - F_3 - W = 0 \;\Rightarrow\; F_2 = F_3 + W = 2W$

彈簧 b 伸長： $2W = 2kx_2 \;\Rightarrow\; x_2 = \dfrac{W}{k}$

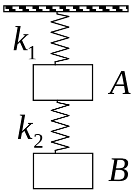
物塊 a： $F_1 - F_2 - W = 0 \;\Rightarrow\; F_1 = F_2 + W = 3W$

彈簧 a 伸長： $3W = 3kx_1 \;\Rightarrow\; x_1 = \dfrac{W}{k}$

總伸長量： $\dfrac{3W}{k}$

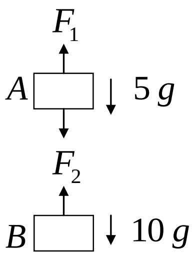


例題：



彈力常數 $k_1 = 2.5\,gw/cm$ 、 $k_2 = 4.0\,gw/cm$ 的兩輕彈簧原長各為 15 cm、10 cm。求 k_1、 k_2 兩彈簧裝置串接 5 g 與 10 g 的 A、B 的兩小物體後，全長為何？

[解析]：



物塊 B： $F_2 - 10 = 0 \Rightarrow F_2 = 10$

彈簧 B 全長： $10 = 4(x_2 - 10) \Rightarrow x_2 = 12.5\,(cm)$

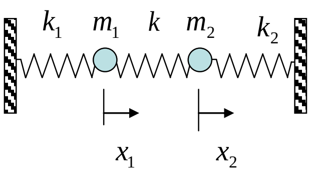
物塊 A： $F_1 - F_2 - 5 = 0 \Rightarrow F_1 = 15$

彈簧 A 全長： $15 = 2.5(x_1 - 15) \Rightarrow x_1 = 21\,(cm)$

全長： $x_1 + x_2 = 33.5\,(cm)$

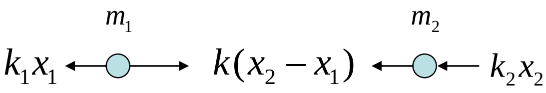
例題：

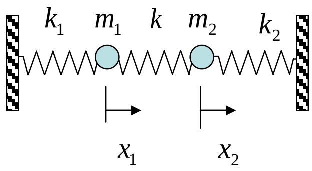
二物體質量分別為 m_1 及 m_2，以彈力常數分別 k_1、 k 、k_2 之三個彈簧連接起來，如圖所示。在不考慮重力及摩擦力情形下，設 m_1 及 m_2 的物體偏離其平衡點之位移分別為 x_1 及 x_2（設向右位移時為正），則 m_1、 m_2 物體此時所受的淨力為若干？



[解析]：

(1)若 $x_2 > x_1$ ，表示中間彈簧 k 為伸長，共伸長 $x_2 - x_1$

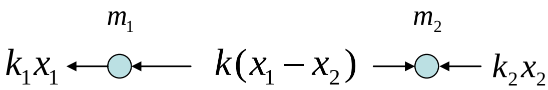




m_1 物體所受的淨力： $k(x_2-x_1)-k_1x_1$

m_2 物體所受的淨力： $-k(x_2-x_1)-k_2x_2$

(2)若 $x_1 > x_2$ ，表示中間彈簧 k 為壓縮，共壓縮 $x_1 - x_2$

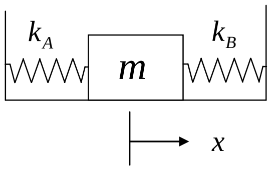


m_1 物體所受的淨力： $-k(x_1-x_2)-k_1x_1 = k(x_2-x_1)-k_1x_1$

m_2 物體所受的淨力： $k(x_1-x_2)-k_2x_2 = -k(x_2-x_1)-k_2x_2$

由上可知，以 $x_2 > x_1$ 或 $x_1 > x_2$ 分析，結論相同。一般以 $x_1 > x_2$ 分析

例題：



圖中，m 物體置於光滑水平面，左右各連接一彈簧，彈力常數分別為 k_A 及 k_B，而各彈簧之另一端則分別固定於牆上。平衡時，二彈簧均無變形。今施一力 F 於物體，使其向右移動 x 距離，則於此時

(A)所施之 F 力大小恰與二彈簧恢復力之總和相等

(B)二彈簧對 m 物體之作用力必大小相等

(C)二彈簧對 m 物體之作用力方向相反

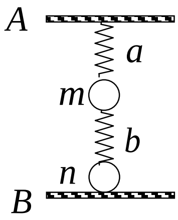
(D) m 物體所受各力之總和為零

(E)二彈簧對 m 物體之作用力總和為 $(k_A+k_B)x$

[解析]： **(A)(D)(E)**

例題：

如圖所示，長 20 cm 力常數 $k=2.0\,gw/cm$ 之完全相同兩彈簧 a、b（質量不計），質量 10 克之重物 m、n 兩個(大小不計），彈簧 a 之上端固定於 A，重物 n 放於平台上，全體保持鉛直



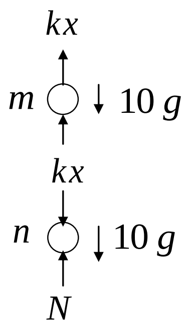
(1)當 A、B 之距離為 40 cm 時， a、b 彈簧全長分別為何？此時平台對 n 之作用力為若干克重？

(2) A、B 之距離為若干 cm 時，平台對球 n 之作用力為零？

(3)平台由靜止緩緩下移，使 A、B 之距離為 50 cm，則 a 彈簧長為若干 cm？

(4)承 (3)，此時平台對 n 之作用力為若干克重？

［解析］：



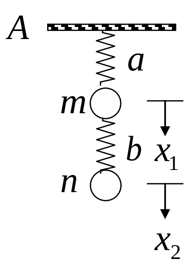
(1) m 物體： $kx+kx-10=0 \;\Rightarrow\; x=2.5\,(cm)$

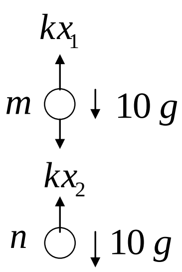
a 彈簧： $20+2.5=22.5\,(cm)$

b 彈簧： $20-2.5=17.5\,(cm)$

n 物體： $N-kx-10=0 \;\Rightarrow\; N=15\,(gw)$

(2)





n 物體： $kx_2-10=0$

$x_2=5\,(cm)$

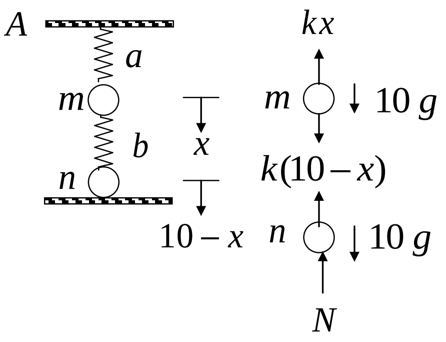
m 物體：$kx_1-kx_2-10=0$

$x_1=10\,(cm)$

A、B 之距離： $20+20+x_1+x_2=55\,(cm)$

(3)(4)

A、B 間共 50 cm，但彈簧總長為 40 cm，則兩彈簧共伸長 10 cm。



m 物體：$kx - k(10-x) - 10 = 0$

$x = 7.5\,(cm)$

a 彈簧長：$20 + x = 27.5\,(cm)$

n 物體：$N + k(10-x) - 10 = 0$

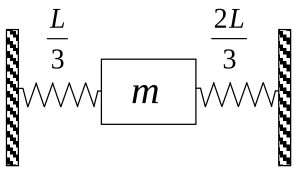
$N = 5\,(gw)$

例題：

彈力常數為 k，原長 L 的彈簧，分成 L/3 及 2L/3 兩段，如圖所示，則使質量 m 的物體

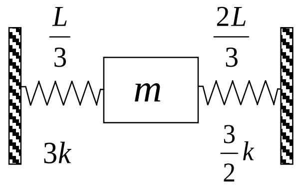
(1)向右移動 x 需力若干？

(2)做 S.H.M. 時週期為若干？



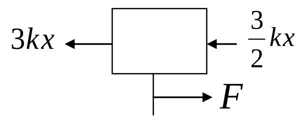
［解析］：

(1) 因同型的彈簧，彈力常數與長度成反比



$$k:k_{L/3}:k_{2L/3}=\frac{1}{L}:\frac{1}{L/3}:\frac{1}{2L/3}=1:3:\frac{3}{2}$$

$$k_{L/3}=3k \qquad k_{2L/3}=\frac{3}{2}k$$



$$F-\frac{3}{2}kx-3x=0 \quad \Rightarrow \quad F=\frac{9}{2}kx$$

(2) $k_{eq}=\frac{9}{2}k$

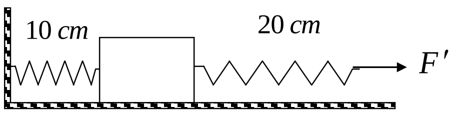
$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{eq}}}=\frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{2m}{k}}$$

例題：

用一彈簧將物體向右移動 1 cm 需力 6 N。今將彈簧分成二段 10 cm 與 20 cm，如圖所示，則

(1)將物體向右移動 1 cm，需用力若干？

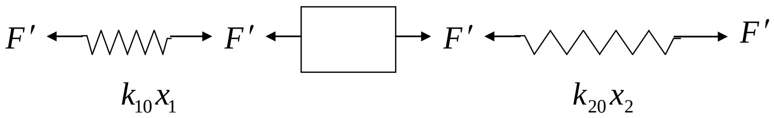
(2)右端彈簧伸長若干？(摩擦力不計)



[解析]： $F=kx \Rightarrow 6=0.01k \Rightarrow k=600\,(N/m)$

因同型的彈簧，彈力常數與長度成反比

$$k:k_{10}:k_{20}=\frac{1}{30}:\frac{1}{10}:\frac{1}{20}=2:6:3 \Rightarrow \begin{cases}k_{10}=1800\,(N/m)\\ k_{20}=900\,(N/m)\end{cases}$$



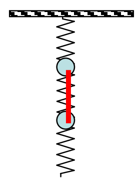
(1) 物體向右移動 1 cm，則 $x_1=1\,(cm)$

$$F'=k_{10}x_1=1800\times 0.01=18\,(N)$$

(2)右端彈簧伸長

$$F'=k_{20}x_2=900\times x_2=18 \Rightarrow x_2=0.02\,(m)=2\,(cm)$$

例題：



一自然長度為 30 公分的輕彈簧，以 10 牛頓的外力拉長時，其伸長量為 6 公分。若在該彈簧不受外力時，將其中間三分之一長度首尾兩點，以 10 公分長的細繩扣住，如圖所示，再以相同的外力拉長時，其伸長量應為多少公分？(假設繩長不會因外力而變)

[解析]：

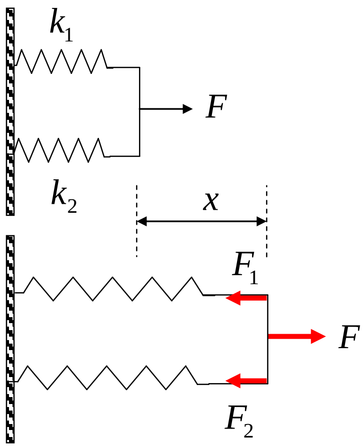
$10=6k \Rightarrow k=\frac{5}{3}\,(N/cm)$ 因同型的彈簧，彈力常數與長度成反比

$$k:k_{1/3}=\frac{1}{1}:\frac{1}{1/3}=1:3 \Rightarrow k_{1/3}=3k=5\,(N/cm)$$

中間被綁住的彈簧相當於不伸長的細繩，可傳遞拉力但不變形

$$\Delta x=\frac{10}{5}+\frac{10}{5}=4\,(cm)$$

彈簧的並聯



(1)各彈簧變形量皆相等

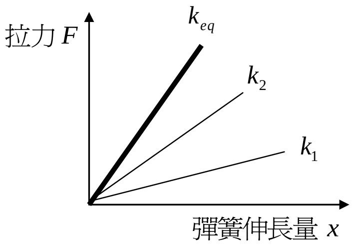
(2)各彈簧受力和等於總外力

(3)等效彈簧的彈力常數 k_{eq}

$$F_1 = k_1 x \qquad F_2 = k_2 x$$

$$F = F_1 + F_2 = k_1 x + k_2 x = k_{eq} x$$

$$\boxed{k_{eq} = k_1 + k_2}$$



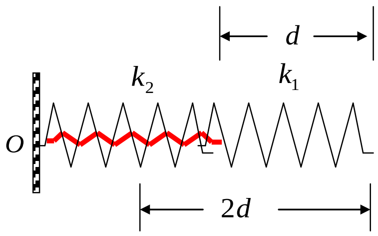
多條彈簧的並聯： $k_{eq} = k_1 + k_2 + k_3 + \Lambda$

(a)並聯後，等效彈簧的彈力常數大於任一條單獨彈簧。

(b)並聯後，彈力常數變大，表示彈簧不容易拉長或壓縮。

例題：

如圖所示，兩彈簧之力常數分別為 k_1 及 k_2，則壓縮 2d 時，施力為若干？



[解析]：

$$F = k_1(2d) + k_2 d = (2k_1 + k_2)d$$

例題：

原長為 40 cm 的彈簧下端懸掛一重物而平衡時，彈簧全長 50 cm。若使四條完全相同彈簧連接相同重物，如圖所示，其中重物厚 5 cm，天花板至地面距離為 125 cm，平衡時上方各彈簧的變形為 x_1，下方各彈簧的變形為 x_2

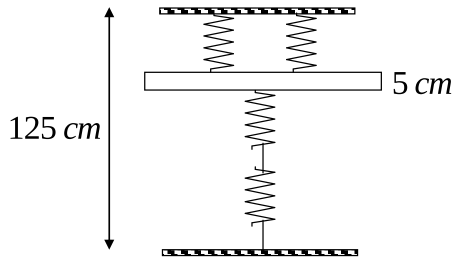
(A) $x_1 = x_2$

(B) $2x_1 = x_2$

(C) $x_1 + x_2 = 5$

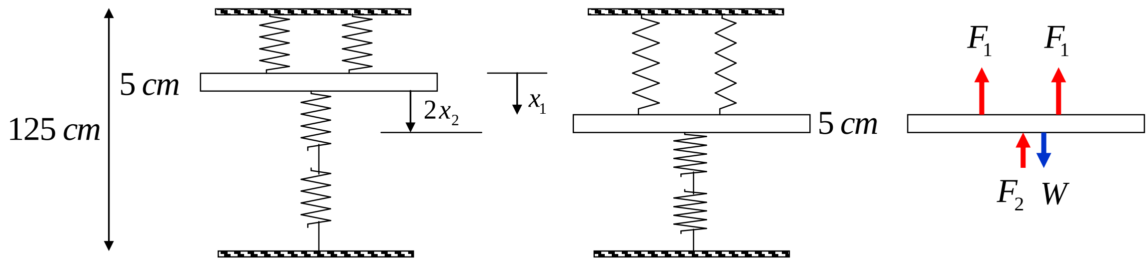
(D) $x_1 = 2.5\,cm$

(E) $x_2 = 2.0\,cm$



［解析］： **(E)**

設物重為 W，彈簧彈力常數為 k　　$W = k(50-40) = 10k$



$$\begin{cases} F_1 = kx_1 \\ F_2 = kx_2 \\ 2F_1 + F_2 = W \\ 40 + x_1 + 2(40 - x_2) = 120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_1 = kx_1 \\ F_2 = kx_2 \\ 2kx_1 + kx_2 = 10k \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_1 = kx_1 \\ F_2 = kx_2 \\ 2x_1 + x_2 = 10 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

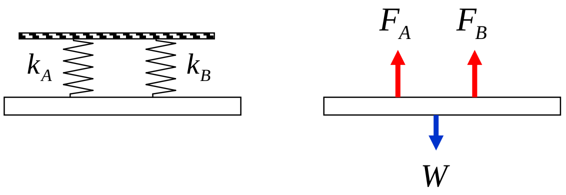
$$F_1 = \frac{2W}{5} \qquad F_2 = \frac{W}{5} \qquad x_1 = 4\,(cm) \qquad x_2 = 2\,(cm)$$

例題：

相同長度的兩彈簧 A、B，若單獨懸掛同一重物時，其伸長量分別為 x_1 及 x_2，若使之並聯後懸掛同一重物，則彈簧組之伸長量為何？(假設重物仍呈水平無偏轉)

[解析]：

設物重為 W，彈簧彈力常數為 k_A、k_B　　$W = k_A x_1 = k_B x_2$



$$\begin{cases} F_1 = k_A x \\ F_2 = k_B x \\ F_1 + F_2 = W \end{cases} \Rightarrow \frac{W}{x_1}x + \frac{W}{x_2}x = W \Rightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}$$

例題：

施 20 牛頓之拉力於一彈簧，見彈簧伸長 10 厘米。今將其等分為二段且並聯之，則欲使每段增長 5 厘米，則兩端應施力若干？

[解析]：

$$20 = k \times 0.1 \quad \Rightarrow \quad k = 200\,(N/m)$$

因同型的彈簧，彈力常數與長度成反比

$$k : k_{L/2} : k_{L/2} = \frac{1}{L} : \frac{1}{L/2} : \frac{1}{L/2} = 1 : 2 : 2 \quad \Rightarrow \quad k_{L/2} = 2k$$

並聯：　$F = 2k(0.05) + 2k(0.05) = 40\,(N)$

例題：

有二彈簧單獨使用、串聯使用、並聯使用，可得四種彈力常數 k_1、k_2、k_3、k_4，但 $k_1 > k_2 > k_3 > k_4$，則下列哪些選項是對的？

(A) $k_1 = k_2 + k_3$ **(B)** $k_2 = k_3 + k_4$ **(C)** $\dfrac{k_1}{k_4} > 4$

(D) $k_1 k_2 = k_3 k_4$ **(E)** $\dfrac{1}{k_2} = \dfrac{1}{k_3} + \dfrac{1}{k_4}$

［解析］： **(A)(C)(E)**

因彈簧並聯時，彈力常數變大；串聯時，彈力常數變小。且 $k_1 > k_2 > k_3 > k_4$，則兩獨立彈簧的彈力常數為 k_2、k_3。

並聯： $k_1 = k_2 + k_3$

串聯： $\dfrac{1}{k_4} = \dfrac{1}{k_2} + \dfrac{1}{k_3} \quad \Rightarrow \quad k_4 = \dfrac{k_2 k_3}{k_2 + k_3}$

$$\frac{k_1}{k_4} = \frac{k_2 + k_3}{\dfrac{k_2 k_3}{k_2 + k_3}} = \frac{(k_2 + k_3)^2}{k_2 k_3} \overset{\text{算幾不等式}\ (k_2 \neq k_3)}{>} \frac{(2\sqrt{k_2 k_3})^2}{k_2 k_3} = 4$$

例題：

以一條彈簧懸掛一小球做上下振動，其週期為 T_1。將八條上述的彈簧，每二條串聯成四長條再並聯之，下懸八個上述的小球做上下振動，若其週期為 T_2，則 T_2/T_1 為何？

[解析]：

每二條串聯成四長條再並聯之等效彈力常數：$k_{eq}=\frac{k}{2}+\frac{k}{2}+\frac{k}{2}+\frac{k}{2}=2k$

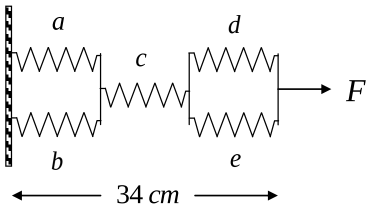
$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad T_2=2\pi\sqrt{\frac{8m}{k_{eq}}}=2\pi\sqrt{\frac{8m}{2k}}$$

$$\frac{T_2}{T_1}=\sqrt{4}=2$$

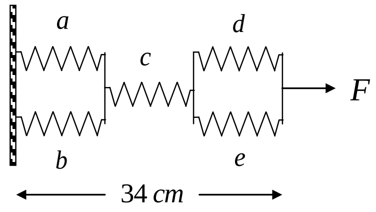
例題：

五根相同的輕彈簧，長度皆為 10 cm，彈力常數 k=10 N/cm。將之裝置如圖後，受一水平外力 F 作用，總長為 34 cm，則(1) C 彈簧總長為何？ (2)外力大小為何？

[解析]：



例題：



五根相同的輕彈簧，長度皆為 10 cm，彈力常數 k=10 N/cm。將之裝置如圖後，受一水平外力 F 作用，總長為 34 cm，則

(1) C 彈簧總長為何？ (2)外力大小為何？

[解析]：

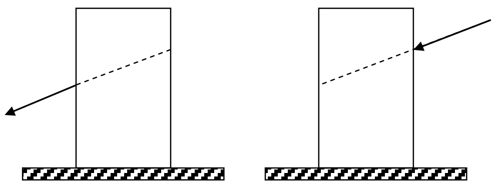
(1) $34=30+\dfrac{\frac{F}{2}}{10}+\dfrac{F}{10}+\dfrac{\frac{F}{2}}{10} \Rightarrow F=20\,(N)$

C 彈簧總長： $10+\dfrac{F}{10}=12\,(cm)$

(2) $F=20\,(N)$

第 3-2 3-3 節 力的種類及合成與分解

1. **接觸力**：施力體與受力體必須接觸才能產生的作用力
如推力、拉力、摩擦力、正向力、張力、…
2. **超距力**：施力體與受力體不須接觸即能產生的作用力
如重力、電力、磁力、…
3. **力的可傳性**：力可以沿著作用線，以原有的大小及方向改變其作用點，而運動效果不變。

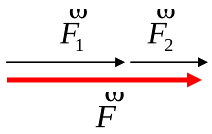


拉力與推力對物體的影響是相同的

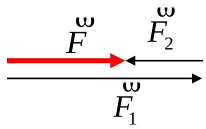
二力的合成 $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$

1. 二力在一直線上：

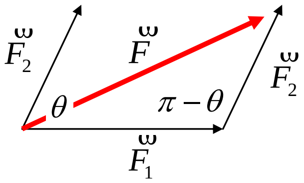
(1)二力同向：



(2)二力反向：



2. 二力的夾角為 θ：



由餘弦定理：

$$\left|\vec{F}\right|^2=\left|\vec{F}_1\right|^2+\left|\vec{F}_2\right|^2-2\left|\vec{F}_1\right|\left|\vec{F}_2\right|\cos(\pi-\theta)$$

$$\left|\vec{F}\right|=\sqrt{\left|\vec{F}_1\right|^2+\left|\vec{F}_2\right|^2+2\left|\vec{F}_1\right|\left|\vec{F}_2\right|\cos\theta}$$

若兩力的夾角 θ 越小，$\cos\theta$ 越大，則合力越大。

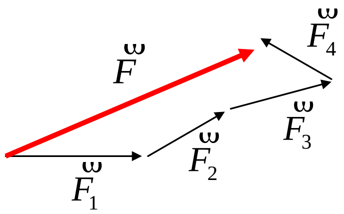
二力平衡的條件

$\vec{F}_1+\vec{F}_2=0$ $\quad$ $\vec{F}_1=-\vec{F}_2$ $\quad$ $\left|\vec{F}_1\right|=\left|\vec{F}_2\right|$

兩力 $\vec{F}_1$ 與 $\vec{F}_2$ 大小相等、方向相反、作用在同一直線上。

三力以上的合成

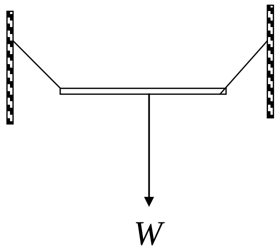
利用多邊形法

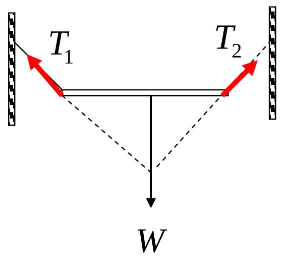


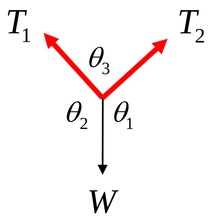
三力平衡的條件

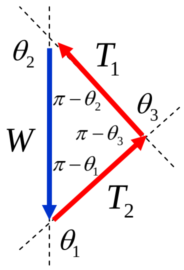
$$\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=0 \qquad \vec{F}_1=-(\vec{F}_2+\vec{F}_3) \qquad |\vec{F}_1|=|\vec{F}_2+\vec{F}_3|$$

當三力不平行時，三力的作用線必定通過同一點，稱為共點力。









由正弦定理：(拉密定理)

$$\frac{T_1}{\sin(\pi-\theta_1)}=\frac{T_2}{\sin(\pi-\theta_2)}=\frac{W}{\sin(\pi-\theta_3)}$$

$$\frac{T_1}{\sin\theta_1}=\frac{T_2}{\sin\theta_2}=\frac{W}{\sin\theta_3}$$

30^0-60^0-90^0
較佳，其它
最好不用

例題：

作用於一物體之三力成平衡，且三力不共線及不平行時

(A)三力之合力必為零

(B)三力的作用線必通過同一點

(C)三力之向量必可構成封閉的三角形

(D)任兩力的合力必與第三力大小相等、方向相反

(E)任一力的大小必小於另兩力大小之和

[解析]：

(A)(B)(C)D)(E)

例題：

把某一個力 F 分解成兩個力的時候，下列敘述何者正確？

(A)一個分力變大時，另一個分力就要變小

(B)兩個分力可以同時變大或變小

(C)無論如何分解，兩個分力不能同時大於這個力的二倍

(D)無論如何分解，兩個分力不能同時小於這個力的一半

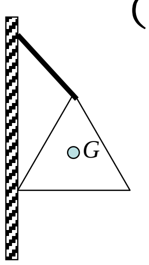
(E)這兩個分力的大小不能同時等於 F 的大小

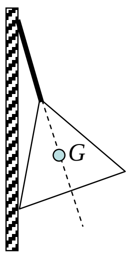
［解析］：

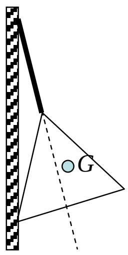
(B)(D)

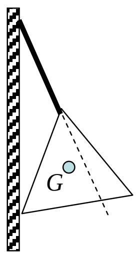
例題：

下列四圖表示一個正三角形均質木板懸於牆上的情形，G 點為木板之重心。設牆為光滑者，故牆對木板之推力與牆垂直。問下列哪一情形最接近平衡狀態？

(A)


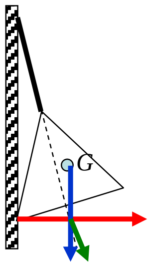
(B)


(C)


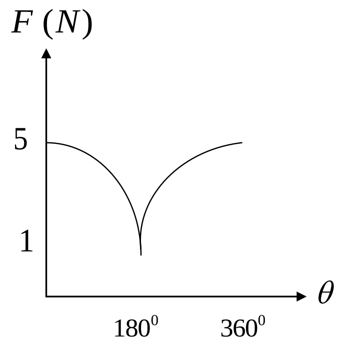
(D)


［解析］：

(C)需三力共點



例題：

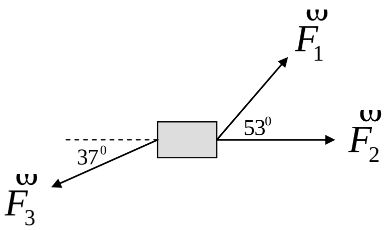


兩個共點力的合力 F 隨它的兩個分力之間夾角 θ 變化而改變的圖形，如圖所示。則這兩個分力的大小分別為多少？

［解析］：

$$\begin{cases} F_1 + F_2 = 5 \\ F_1 - F_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_1 = 3\,(N) \\ F_2 = 2\,(N) \end{cases}$$

例題：



一物體受力如圖所示，其中 $F_1 = 10\ N$ 、 $F_2 = 13\ N$ 、 $F_3 = 20\ N$，則此物體所受合力大小為何？

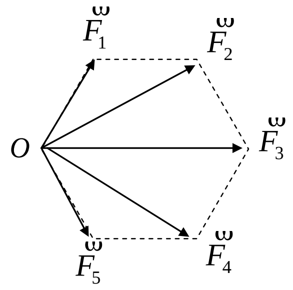
［解析］：

$$\begin{aligned} &\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \\ &= (10\cos 53^0\,\vec{i} + 10\sin 53^0\,\vec{j}) + 13\vec{i} + (-20\cos 37^0\,\vec{i} - 20\sin 37^0\,\vec{j}) \\ &= (6\vec{i} + 8\vec{j}) + 13\vec{i} + (-16\vec{i} - 12\vec{j}) \\ &= 3\vec{i} - 4\vec{j} \end{aligned}$$

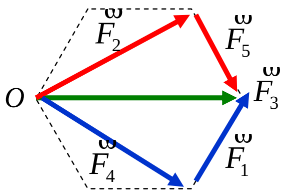
$$\left|\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3\right| = \left|3\vec{i} - 4\vec{j}\right| = 5$$

例題：

如圖所示，有五個力作用於一點 O，這五個力構成一個正六邊形的兩個鄰邊和三條對角線。設 $F_3 = 5\,N$，則這五個力的合力大小為多少？



[解析]：



$$\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}+\vec{F_4}+\vec{F_5}=(\vec{F_1}+\vec{F_4})+(\vec{F_2}+\vec{F_5})+\vec{F_3}$$

$$\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}+\vec{F_4}+\vec{F_5}=\vec{F_3}+\vec{F_3}+\vec{F_3}=3\vec{F_3}$$

$$\left|\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}+\vec{F_4}+\vec{F_5}\right|=3\left|\vec{F_3}\right|=15\,(N)$$

例題：

有 5 gw、10 gw、15 gw、20 gw、30gw 等五個力同時作用於物體上某一點而呈平衡，則 5 gw、10 gw、15 gw、20 gw 四力的合力大小為多少？

[解析]：

$$\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}+\vec{F_4}+\vec{F_5}=0$$

$$\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}+\vec{F_4}=-\vec{F_5}$$

$$\left|\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}+\vec{F_4}\right|=\left|\vec{F_5}\right|=30\,(gw)$$

例題：

有三力同時作用於一物體而產生淨力平衡，已知其中兩力分別為 $\vec{F}_1 = 10\vec{i} - 4\vec{j}$ 與 $\vec{F}_2 = 17\vec{i} + 2\vec{j}$ ，以牛頓為單位，則第三力為何？

[解析]：

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$$

$$(10\vec{i} - 4\vec{j}) + (17\vec{i} + 2\vec{j}) + \vec{F}_3 = 0$$

$$\vec{F}_3 = -27\vec{i} + 2\vec{j}$$

例題：

有三個共點力 $\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$、$\vec{F}_3$ 成平衡狀態，$\vec{F}_2$ 與 $\vec{F}_3$ 兩力夾角 α，$\vec{F}_3$ 與 $\vec{F}_1$ 兩力夾角 β，$\vec{F}_1$ 與 $\vec{F}_2$ 兩力夾角 γ，則

(A)此三力共平面

(B) $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$

(C) $F_1 : F_2 : F_3 = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$

(D) $F_1 + F_2 > F_3$

(E)三力圍成一封閉三角形，內角為 α、β、γ

[解析]：

(A)(C)(D) (B) $\alpha + \beta + \gamma = 360^0$

(D)三角形兩邊之和大於第三邊

例題：

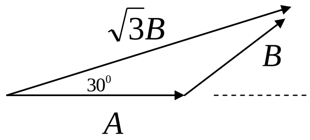
二不等向量 $\vec{A}$、$\vec{B}$（$A \neq B$），其合向量大小為 $\sqrt{3}B$，其方向與 $\vec{A}$ 之夾角為 30^0。當此二向量正交時，其合向量大小為多少？(以 B 表示)

[解析]：

由餘弦定律

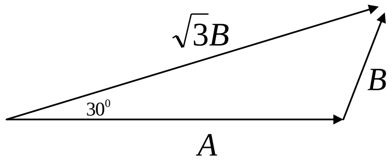
$$B^2 = (\sqrt{3}B)^2 + A^2 - 2(\sqrt{3}B)A\cos 30^0 \qquad A^2 - 3AB + 2B^2 = 0$$

$$(A-B)(A-2B) = 0 \qquad A = B \ \ or \ \ A = 2B$$



當此二向量正交時，合向量

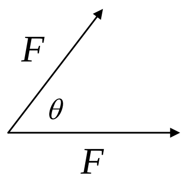
$$\sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{2}B \ \ or \ \ \sqrt{5}B$$

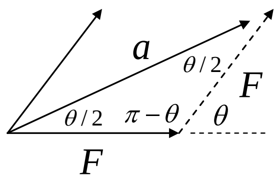


例題：

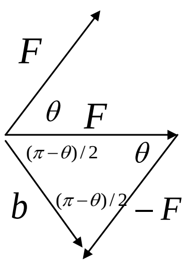
二向量大小相等，夾角為 θ 時其合向量大小為 a，差向量大小為 b，則 a：b = ？

[解析]：





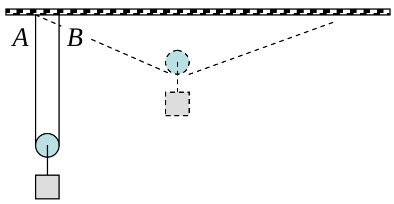
$$\frac{a}{\sin(\pi-\theta)} = \frac{F}{\sin\frac{\theta}{2}} \qquad a = 2F\cos\frac{\theta}{2}$$



$$\frac{b}{\sin\theta} = \frac{F}{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2})} \qquad b = 2F\sin\frac{\theta}{2}$$

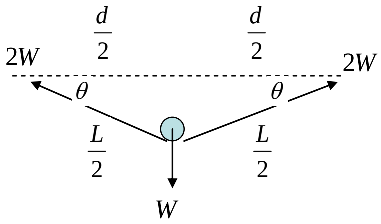
$$\frac{a}{b} = \cot\frac{\theta}{2}$$

例題：



輕繩 AB 總長 L，用輕滑輪懸掛重 W 的物體。繩能承受的最大拉力為 2W。將 A 端固定，B 端緩緩向右移動 d，如圖所示，為使繩不斷，求 d 的最大可能值？

[解析]：



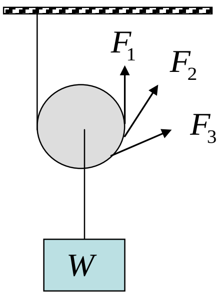
$$\sum F_y = 0 \qquad 2W\sin\theta + 2W\sin\theta - W = 0$$

$$\sin\theta = \frac{1}{4}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{15}}{4} \qquad \frac{\frac{d}{2}}{\frac{L}{2}} = \frac{\sqrt{15}}{4} \Rightarrow d = \frac{\sqrt{15}}{4}L$$

例題：

如圖所示，使用動滑輪等速提高一個重物，假設滑輪和繩的摩擦可忽略。若分別沿圖中所示方向施力，則三力大小關係為何？

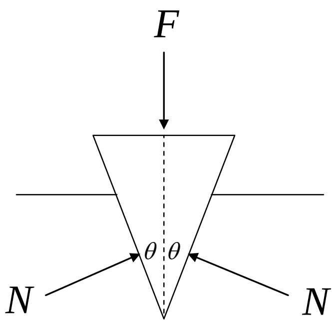


[解析]：

$F_1 < F_2 < F_3$

例題：

圖中為斧頭劈木的示意圖，若施加於斧頭向下的力為 F，木頭反抗正向力為 N。不考慮斧頭重量與摩擦力，則 N / F = ？



[解析]：

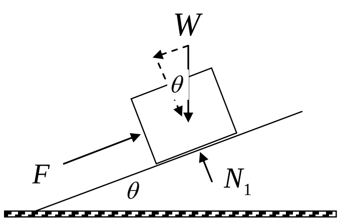
$$\sum F_y = 0 \qquad 2N\sin\theta - F = 0$$

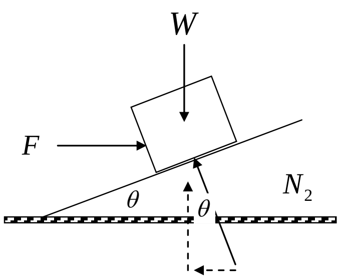
$$\frac{N}{F} = 2\sin\theta$$

例題：

一物重 W 置於光滑斜面上，若平行斜面向上施力使物體靜止，斜面對物體的正向力為 N_1。若改為同大小的水平施力亦可支撐時，正向力變為 N_2。則 N_1 與 N_2 的乘積與 W 的關係為何？

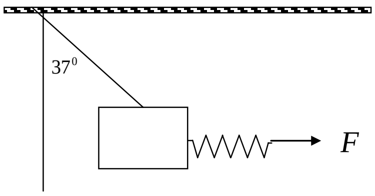
[解析]：





$$N_1 = W\cos\theta \qquad N_2\cos\theta = W$$

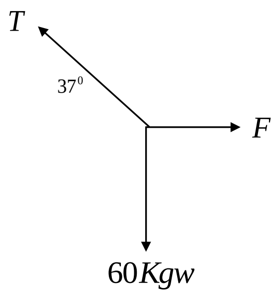
$$N_1 N_2 = W^2$$



例題：

如圖所示，60 Kg 重的物體用細繩懸於天花板，物體一側與力常數為1500 Kgw/m 的彈簧相連，彈簧質量可不計。施一水平外力於彈簧上，使繩與鉛直線夾 37^0，則彈簧的伸長量為多少？

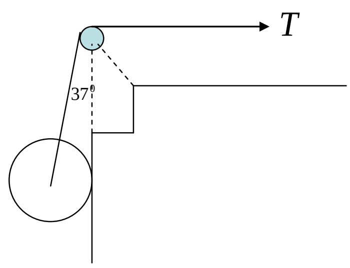
[解析]：



$$\sum F_y = 0 \qquad T\cos 37^0 = 60 \qquad T = 75$$

$$\sum F_x = 0 \qquad F = T\sin 37^0 = 45\,(kgw)$$

$$F = 45 = 1500x \quad \Rightarrow \quad x = 0.03\,(m) = 3\,(cm)$$



例題：

如圖所示，質量 m 的銅球以細繩懸靠於一光滑牆面上，繩和鉛直線夾角為 37^0，此時繩子張力為 T。將細繩緩慢放開至銅球懸靠牆面繩與鉛直線之夾角為 30^0，此時繩子的張力為 T'，則 $T'/T=$ ？

[解析]：

$$\begin{cases} T\cos 37^0 = mg \\ T'\cos 30^0 = mg \end{cases} \Rightarrow \quad T\cos 37^0 = T'\cos 30^0 \quad \Rightarrow \quad \frac{T'}{T} = \frac{\cos 37^0}{\cos 30^0} = \frac{8}{5\sqrt{3}}$$

例題：

下列哪三個力(單位為仟克重)可調整力的方向而使合力為零？

(A) 6、9、16

(B) 12、16、21

(C) 3、4、9

(D) 100、150、400

(E) 20、12、33

［解析］：

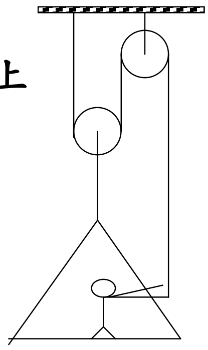
(B)三角形兩邊之和大於第三邊

例題：

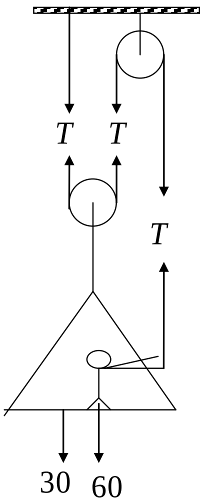
如圖所示，體重 60 公斤的人站在 30 公斤的平臺上

(1)人要對繩施以多大的拉力才能使平臺懸空靜止

(2)當平臺懸空靜止時，人對木板的正向力是多大？



［解析］：

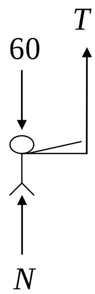


(1) $\sum F_y = 0$ $\quad T + T + T - 30 - 60 = 0$

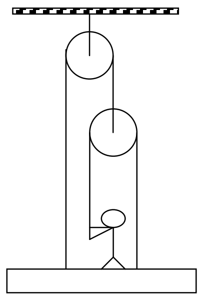
$$T = 30\ (kgw)$$

(2) $\sum F_y = 0$ $\quad T - 60 + N = 0$

$$N = 30\ (kgw)$$



例題：

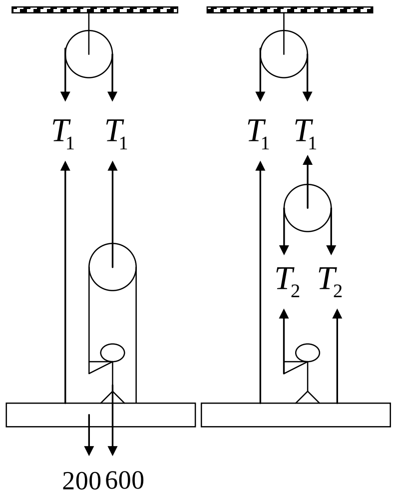


如圖所示，體重 600 牛頓的人站在 200 牛頓重的木板上，則

(1)人要對繩施以多大的拉力才能使木板懸空靜止

(2)當木板懸空靜止時，人對木板的正向力是多大？

[解析]：



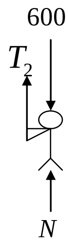
(1) $\sum F_y = 0 \quad T_1 + T_1 - 200 - 600 = 0$

$T_1 = 400\,(N)$

$\sum F_y = 0 \quad T_1 - 2T_2 = 0$

$T_2 = 200\,(N)$

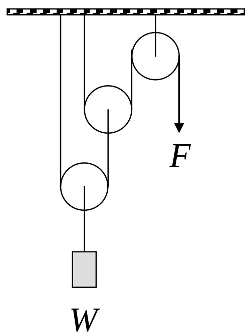
(2)



$T_2 - 600 + N = 0$

$N = 400\,(N)$

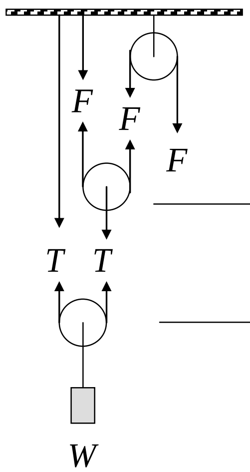
例題：



如圖所示，利用動滑輪組支撐重量 W 的物體，若不計滑輪的重量與阻力作用，求

W / F = ？

[解析]：

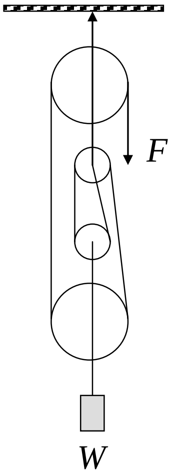


$\sum F_y = 0 \quad F + F - T = 0 \quad T = 2F$

$\sum F_y = 0 \quad T + T - W = 0 \quad W = 2T = 4F$

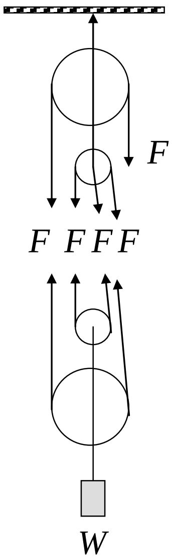
$$\frac{W}{F} = 4$$

例題：



如圖所示，利用動滑輪組支撐重量 W 的物體，若不計滑輪的重量與阻力作用，求 W / F = ？

[解析]：

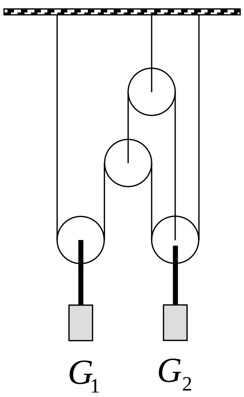


$$\sum F_y = 0 \qquad F + F + F + F - W = 0$$

$$W = 4F$$

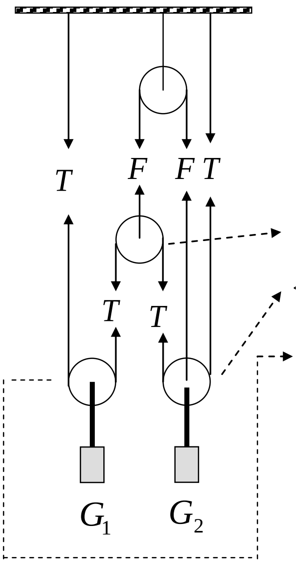
$$\frac{W}{F} = 4$$

例題：



如圖所示，整個系統處於平衡狀態，若不計滑輪的重量與阻力作用，求兩物的重力 G1 與 G2 關係？

[解析]：

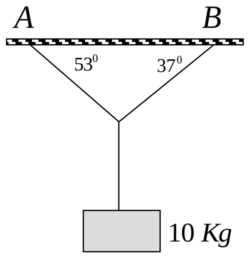


$$\sum F_y = 0$$

$$\begin{cases} F - T - T = 0 \\ T + F + T - G_2 = 0 \\ T + T - G_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} F = 2T \\ G_2 = 4T \\ G_1 = 2T \end{cases}$$

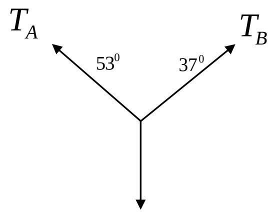
$$G_2 = 2G_1$$

例題：

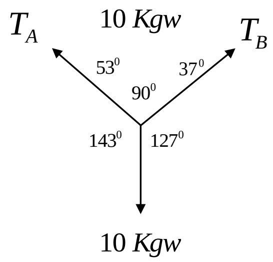


如圖所示，一重 10 Kg 的物體掛在一繩上某點，恰可使之靜止不動，則繩作用於 A、B 兩點的張力各為多少？

［解析］：



$$\begin{cases} T_B\cos 37^0 = T_A\cos 53^0 \\ T_B\sin 37^0 + T_A\sin 53^0 = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} T_A = 8\,(kgw) \\ T_B = 6\,(kgw) \end{cases}$$

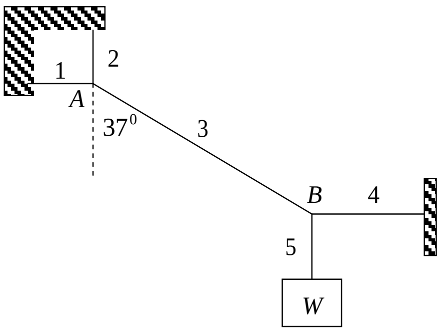


$$\frac{T_A}{\sin 127^0} = \frac{T_B}{\sin 143^0} = \frac{10}{\sin 90^0}$$

$$\frac{T_A}{\sin 53^0} = \frac{T_B}{\sin 37^0} = \frac{10}{1} \qquad \begin{cases} T_A = 8\,(kgw) \\ T_B = 6\,(kgw) \end{cases}$$

例題：

平衡系統中，已知繩 1 的張力為 12 N，則下列敘述何者正確？



(A)繩 2 的張力為 16 N

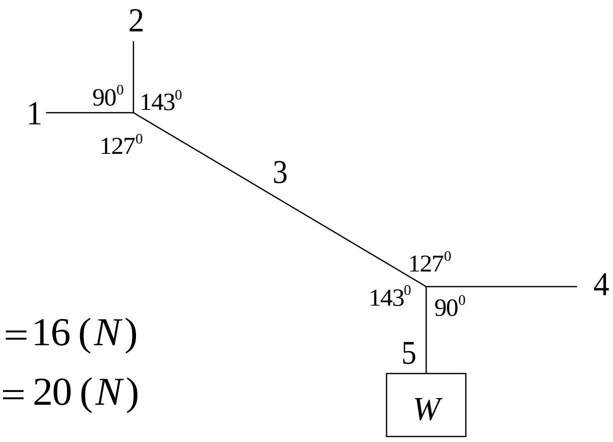
(B)繩 3 的張力為 20 N

(C)繩 4 的張力為 12 N

(D)繩 5 的張力為 16 N

(E)物體重 W=16N

［解析］： **(A)(B)(C)(D)(E)**



$$\frac{T_1}{\sin 143^0}=\frac{T_2}{\sin 127^0}=\frac{T_3}{\sin 90^0}$$

$$\frac{12}{\sin 37^0}=\frac{T_2}{\sin 53^0}=\frac{T_3}{1} \qquad \begin{cases} T_2=16\,(N) \\ T_3=20\,(N) \end{cases}$$

$$\frac{T_3}{\sin 90^0}=\frac{T_4}{\sin 143^0}=\frac{T_5}{\sin 127^0}$$

$$\frac{20}{1}=\frac{T_4}{\sin 37^0}=\frac{T_5}{\sin 53^0} \qquad \begin{cases} T_4=12\,(N) \\ T_5=16\,(N) \end{cases} \qquad W=T_5=16\,(N)$$

例題：

a、b、c、d、e 各繩連接如圖所示，當下掛一質量 m 之物而成平衡時，各繩張力分別為 T_a、T_b、T_c、T_d、T_e，則

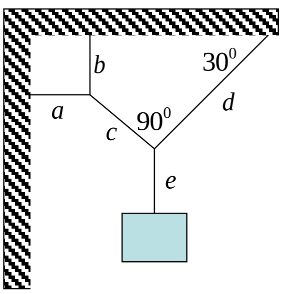
(A) T_e 最大

(B) T_a 最小

(C) $T_b>T_c$

(D) $T_c>T_d$

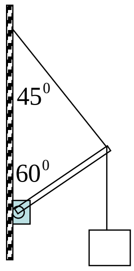
(E) $T_b=\sqrt{3}T_a$



［解析］：

(A)(B)(D)(E)

例題：(當非常用特別角，拉密定理有點難算)

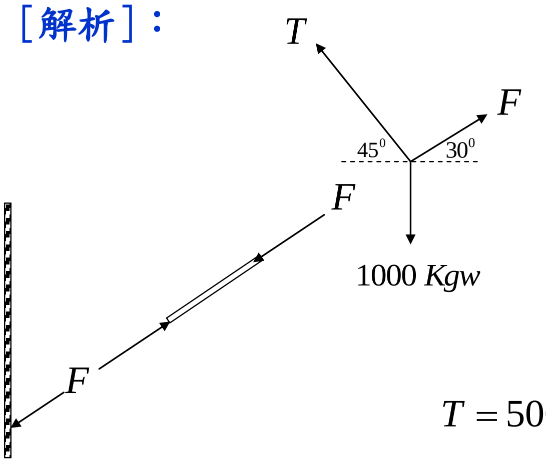


如圖，若繩與撐桿之質量不計，且撐桿一端連接於壁面，而一端掛質量 1000 Kg 的物體，求

(1)繩張力 T 為若干 Kgw？

(2)壁作用於撐桿之力 F 為若干 Kgw？

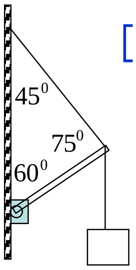
[解析]：



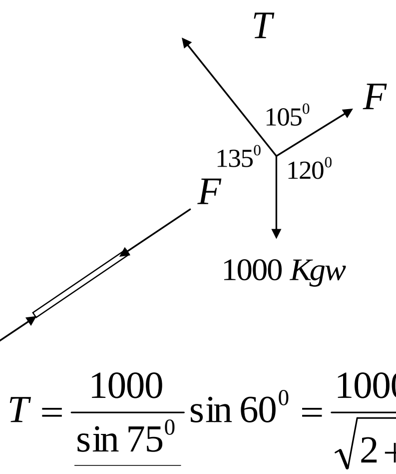
$$\begin{cases} F\cos 30^0 = T\cos 45^0 \\ F\sin 30^0 + T\sin 45^0 = 1000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3}F = \sqrt{2}T \\ \dfrac{F}{2} + \dfrac{T}{\sqrt{2}} = 1000 \end{cases}$$

$$T = 500(3\sqrt{2} - \sqrt{6}) \qquad F = 1000(\sqrt{3} - 1)$$



[另解]：**(拉密定理)** $\sin 75^0 = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$



$$\frac{1000}{\sin 105^0} = \frac{T}{\sin 120^0} = \frac{F}{\sin 135^0}$$

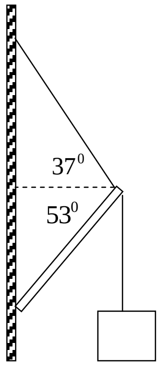
$$\frac{1000}{\sin 75^0} = \frac{T}{\sin 60^0} = \frac{F}{\sin 45^0}$$

$$T = \frac{1000}{\dfrac{\sin 75^0}{2}}\sin 60^0 = \frac{1000\sqrt{3}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = 1000\sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{3}} = 1000\sqrt{6-3\sqrt{3}}$$

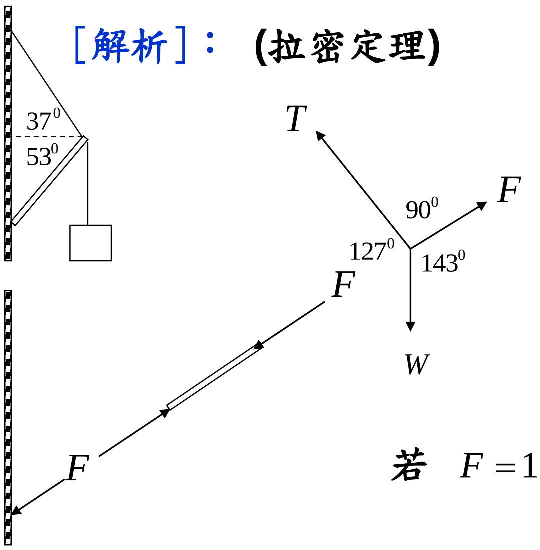
$$T = 1000\sqrt{\frac{12-2\sqrt{27}}{2}} = 1000\frac{\sqrt{9}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 500(3\sqrt{2}-\sqrt{6})$$

例題：

如圖，斜繩最多能承受 1200 N 的張力，撐桿能承受的力極大值為 1800 N，設鉛直繩夠堅牢，可以支持任何負荷，不計稱桿的重量，則此結構所能支撐最大物重為多少？



[解析]：(拉密定理)



$$\frac{W}{\sin 90^0}=\frac{T}{\sin 143^0}=\frac{F}{\sin 127^0}$$

$$\frac{W}{1}=\frac{T}{\sin 37^0}=\frac{F}{\sin 53^0}$$

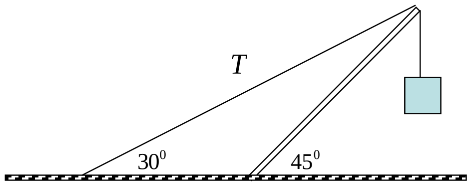
若 $F=1800$ $\quad\frac{W}{1}=\frac{T}{\sin 37^0}=\frac{1800}{\sin 53^0}$

$T=1350>1200\,(N)$ 不合

若 $T=1200$ $\quad\frac{W}{1}=\frac{1200}{\sin 37^0}=\frac{F}{\sin 53^0}$

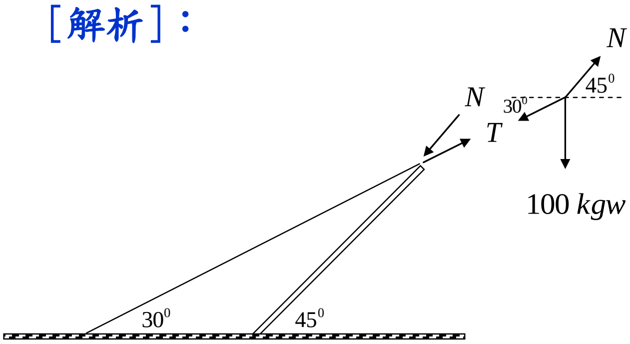
$F=1600\,(N)\quad W=2000\,(N)$

例題：



如圖所示，有一重 W=100 Kg 之物體吊於繩上，經由一支桿件支持而平衡。若桿重不計，則繩的張力 T 為何？桿件的作用力 N 為何？

[解析]：



$$\sum F_x = 0$$

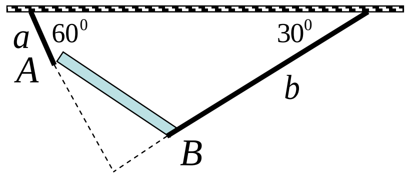
$$N\cos 45^0 - T\cos 30^0 = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$N\sin 45^0 - T\sin 30^0 - 100 = 0$$

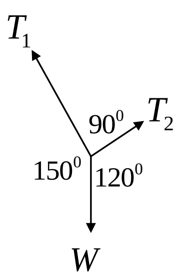
$$T = 100(\sqrt{3}+1) \qquad N = 50(3\sqrt{2}+\sqrt{6})$$

例題：



如圖所示，a、b 兩繩各與天花板成 60^0 及 30^0 之夾角，AB 為均勻質量之木棒，棒重 W。若平衡時 a、b 繩上之張力為 T_1 及 T_2，則 T_1、T_2 各若干？

[解析]：



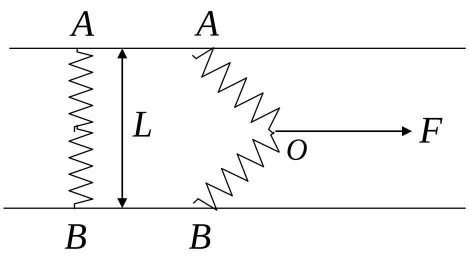
$$\frac{W}{\sin 90^0} = \frac{T_1}{\sin 120^0} = \frac{T_2}{\sin 150^0}$$

$$\frac{W}{1} = \frac{T_1}{\sin 60^0} = \frac{T_2}{\sin 30^0}$$

$$T_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}W \qquad T_2 = \frac{1}{2}W$$

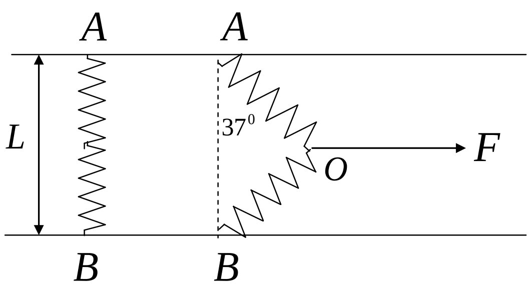
例題：

長為 L、彈力常數為 k 之輕彈簧固定其上下兩端，今於其中點 O 處施一水平力 F，使彈簧各段與鉛直線成 37^0，則力 F 大小為何？



[解析]： **因同型的彈簧，彈力常數與長度成反比**

$$k:k_{L/2}:k_{L/2}=\frac{1}{L}:\frac{1}{L/2}:\frac{1}{L/2}=1:2:2 \qquad k_{L/2}=2k$$

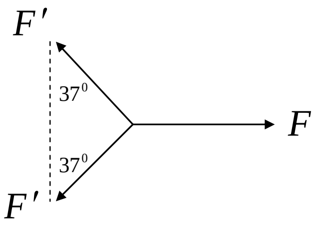


彈簧各段長度：

$$\frac{L}{2}=L'\cos 37^0 \quad \Rightarrow \quad L'=\frac{5L}{8}$$

彈簧各段受力：

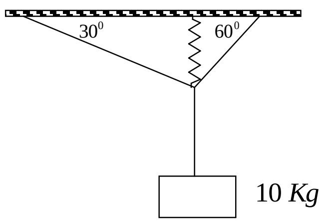
$$F'=2k(\frac{5}{8}L-\frac{1}{2}L)=\frac{1}{4}kL$$



$$F=2F'\sin 37^0=\frac{3}{10}kL$$

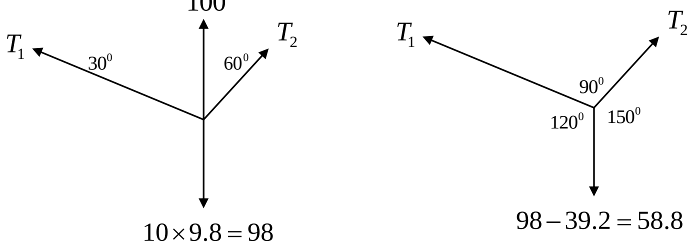
例題：

一物重 10 仟克，以細繩及彈簧吊起平衡，如圖所示。設彈簧原長 1.5 厘米，彈力常數 7840 N/m，細繩較長者長度為 4 厘米，則較長細繩之張力為多少？(g=9.8 m/s²)



[解析]：

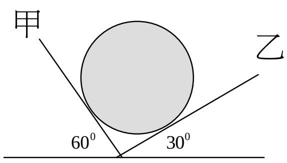
$$7840(\frac{4\sin 30^0 - 1.5}{100}) = 39.2$$



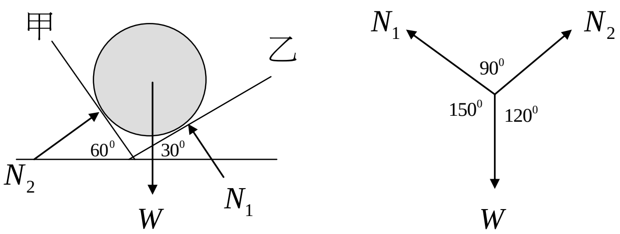
$$\frac{58.8}{\sin 90^0} = \frac{T_1}{\sin 150^0} = \frac{T_2}{\sin 120^0} \qquad T_1 = 29.4\,(N)$$

例題：

一球置於一直角兩壁間，如圖所示。球重 W，壁與球無摩擦力，求兩壁與球的作用力。



[解析]：



$$\frac{W}{\sin 90^0} = \frac{N_1}{\sin 120^0} = \frac{N_2}{\sin 150^0}$$

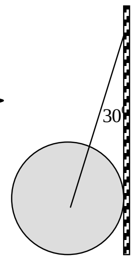
$$N_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}W \qquad N_2 = \frac{1}{2}W$$

例題：

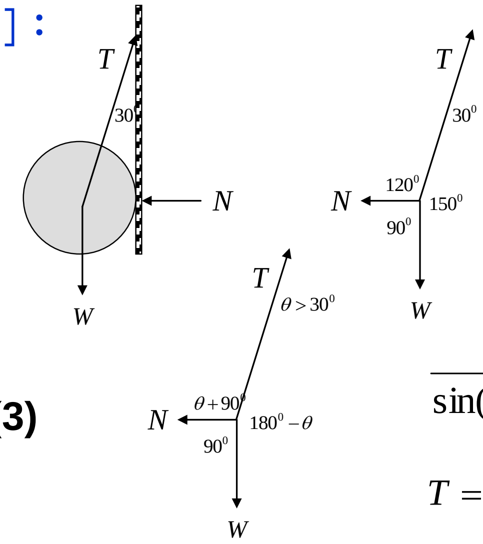
如圖所示，銅球質量為 10 Kg，懸於光滑鉛直牆上，求

(1)繩上的張力？　　(2)牆作用於球的力？

(3)若把繩改短，則(1)、(2)之力有何變化？



[解析]：



(1) (2)

$$\frac{10}{\sin 120^0}=\frac{N}{\sin 150^0}=\frac{T}{\sin 90^0}$$

$$T=\frac{20}{\sqrt{3}}(kgw) \qquad N=\frac{10}{\sqrt{3}}(kgw)$$

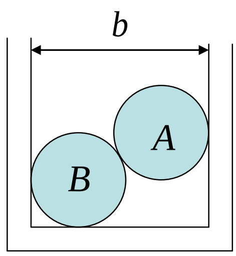
(3)

$$\frac{10}{\sin(\theta+90^0)}=\frac{N}{\sin(180^0-\theta)}=\frac{T}{\sin 90^0}$$

$T=10\sec\theta$ 　$N=10\tan\theta$ 　皆變大

例題：

如圖所示，A、B 兩光滑鋼珠放置於一盒中，整個系統不計摩擦，若球半徑均為 r = 10 cm，球 A 重 120 牛頓，球 B 重 150 牛頓，盒寬 b = 36 cm。求

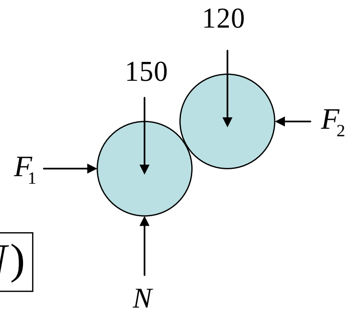


(1)盒壁作用於 A 球之力，及 A、B 兩球互相作用力

(2)盒壁作用於 B 球之力

(3)盒底作用於 B 球之力

[解析]： 先整體系統討論

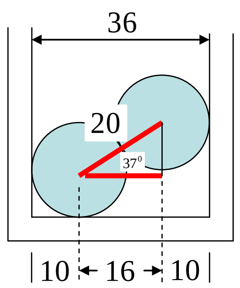


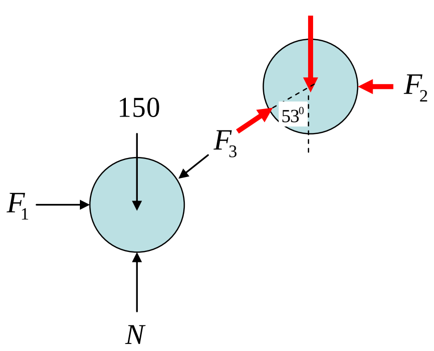
$$\sum F_x = 0 \qquad \boxed{F_1 = F_2}$$

$$\sum F_y = 0 \qquad \boxed{N = 150 + 120 = 270\ (N)}$$

再個別討論

兩球間的作用力必通過球心





$$\sum F_y = 0$$

$$F_3 \cos 53^0 - 120 = 0$$

$$\boxed{F_3 = 200\ (N)}$$

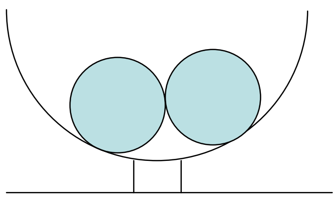
$$\sum F_x = 0$$

$$F_3 \sin 53^0 - F_2 = 0$$

$$\boxed{F_2 = 150\ (N)}$$

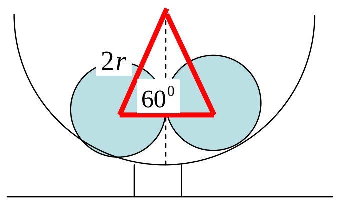
例題：

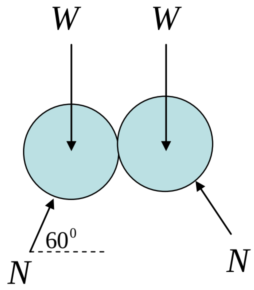
如圖所示，光滑半球形碗之半徑為 3r，內置二個半徑為 r 的光滑小球，球重 W。則當平衡時二球間的相互作用力及球對碗壁之作用力各為若干？



[解析]： 先整體系統討論

兩球間的作用力必通過球心



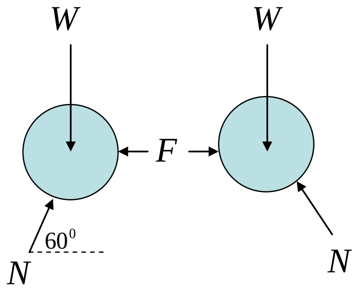


$$\sum F_y = 0$$

$$N\sin 60^0 = W$$

$$N = \frac{2W}{\sqrt{3}}$$

再個別討論



$$\sum F_x = 0 \qquad F = N\cos 60^0 = \frac{W}{\sqrt{3}}$$

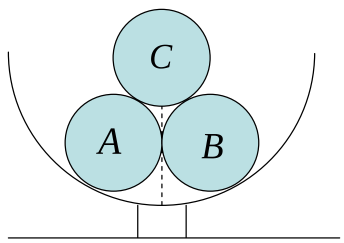
例題：

將三個半徑皆為 r，質量皆為 m 的光滑小球靜置於半徑為 3r 的大碗內，如圖所示，求

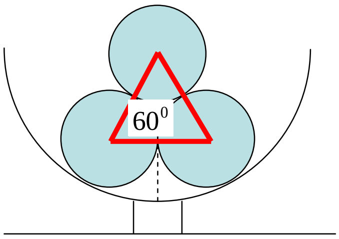
(1) B、C 兩球間之作用力

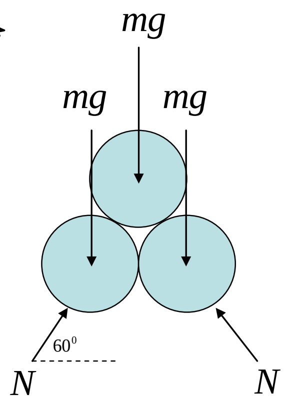
(2) A、B 兩球間之作用力

(3) A 球作用於碗壁的力



[解析]：先整體系統討論



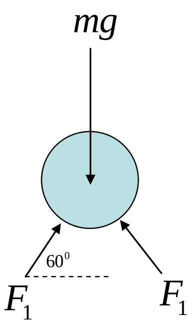


$$\sum F_y = 0$$

$$2N\sin 60^0 = 3mg$$

$$\boxed{N = \sqrt{3}mg}$$

討論 C 球

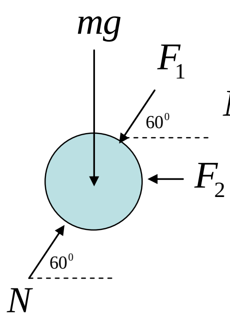


$$\sum F_y = 0$$

$$2F_1 \sin 60^0 = mg$$

$$\boxed{F_1 = \frac{mg}{\sqrt{3}}}$$

討論 A 球



$$\sum F_x = 0$$

$$N\cos 60^0 - F_2 - F_1\cos 60^0 = 0$$

$$\boxed{F_2 = \frac{mg}{\sqrt{3}}}$$

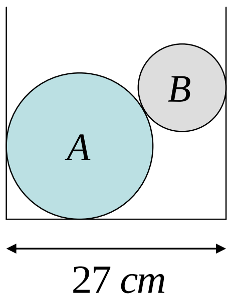
例題：

重量為 4W 及 W 的 A、B 兩球，半徑分別為 10 cm、5 cm，置於底面半徑 13.5 cm 之圓柱型容器內而平衡，如圖所示，若不考慮摩擦力，各接觸面接光滑，則

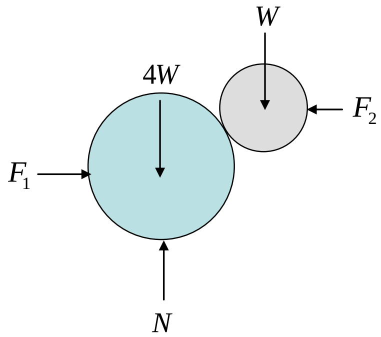
(1)兩側面施予球之力？

(2)兩球間作用力？

(3)容器底給予球的作用力？



[解析]： 先整體系統討論

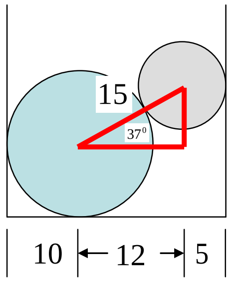


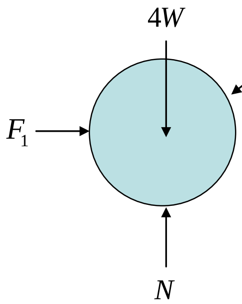
$\sum F_x = 0$ $\boxed{F_1 = F_2}$

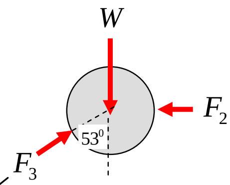
$\sum F_y = 0$ $\boxed{N = 4W + W = 5W}$

再個別討論，討論 B 球

兩球間的作用力必通過球心







$\sum F_y = 0$

$F_3 \cos 53^0 - W = 0$

$\boxed{F_3 = \frac{5}{3} W}$

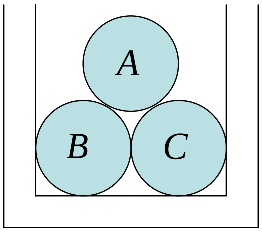
$\sum F_x = 0$

$F_3 \sin 53^0 - F_2 = 0$

$\boxed{F_2 = \frac{4}{3} W}$

例題：

如圖所示，有大小相等的三個光滑圓柱體 A、B、C 同置於一 U 型凹槽中，若 A、B、C 各重 W 仟克重，則 B 共受幾個作用力？

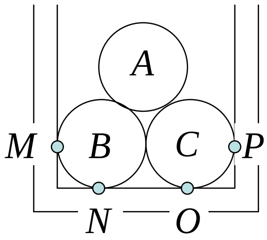


[解析]：

四個

例題：

有大小相等的三個光滑球體 A、B、C，同置於一方箱中，如圖所示。若 A 及 B 各重 10 仟克，C 重 5 仟克。求此箱中 M、N、O、P 四點上所受之最小作用力及 B、C 兩球間的最小作用力各為何？



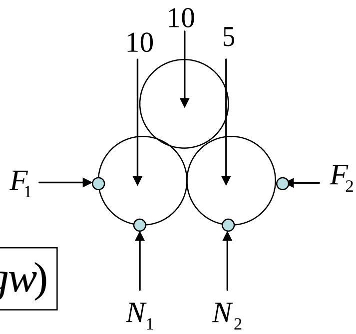
[解析]：

因若無方箱阻擋，則 B、C 球將往兩側移開。因此，B、C 兩球間最小作用力為零。

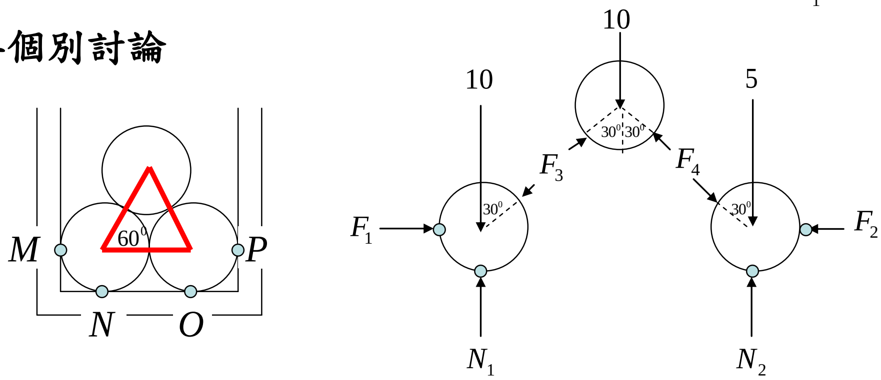
先整體系統討論

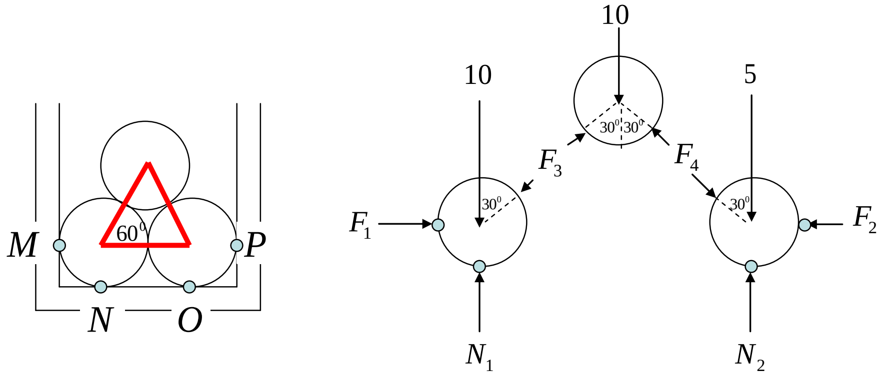
$\sum F_x = 0$　$\boxed{F_1 = F_2}$

$\sum F_y = 0$　$\boxed{N_1 + N_2 = 10 + 10 + 5 = 25\,(kgw)}$



再個別討論





討論 A 球 $\sum F_x = 0 \quad F_3 \sin 30^0 - F_4 \sin 30^0 = 0$

$\sum F_y = 0 \quad F_3 \cos 30^0 + F_4 \cos 30^0 - 10 = 0$

$\boxed{F_3 = F_4 = \dfrac{10}{\sqrt{3}}}$

討論 B 球 $\sum F_x = 0 \quad F_1 - F_3 \sin 30^0 = 0$

$\boxed{F_1 = F_2 = \dfrac{5}{\sqrt{3}}}$

$\sum F_y = 0 \quad N_1 - F_3 \cos 30^0 - 10 = 0$

$\boxed{N_1 = 15}$

討論 C 球 $\sum F_x = 0 \quad F_4 \sin 30^0 - F_2 = 0$

$\sum F_y = 0 \quad N_2 - F_4 \cos 30^0 - 5 = 0$

$\boxed{N_2 = 10}$

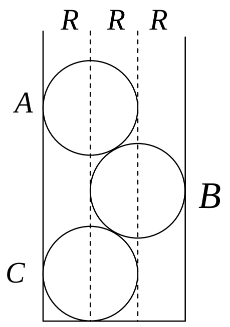
例題：

大小與重量皆相同的三個光滑圓柱堆於一溝槽中，溝槽寬度為 3R，如圖所示。若每個圓柱的重量均為 W，半徑為 R。則

(1)圓柱 C 與溝底間的作用力大小為何？

(2) A、B 兩圓柱間的作用力大小為何？

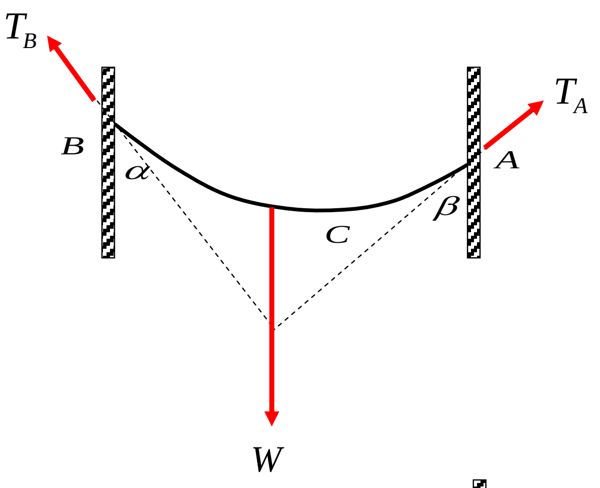
(3)圓柱 A 與溝壁間的作用力大小為何？



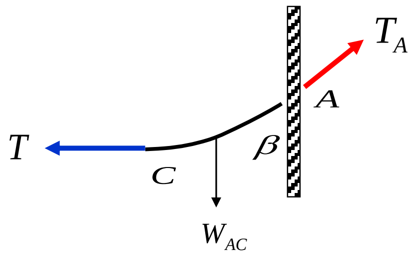
[解析]：

(1) $3W$ **(2)** $\dfrac{2\sqrt{3}W}{3}$ **(3)** $\dfrac{\sqrt{3}W}{3}$

繩索受力的分析

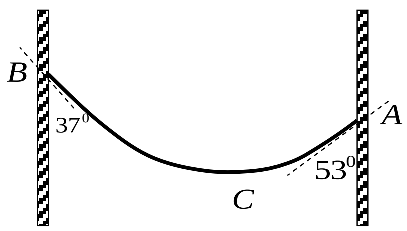


1. 繩在端點受力方向為切線方向。
2. 若繩懸於牆壁兩端，則 T_A、T_B、W 三力共點。
3. 重心並非一定位於最低點，需視繩懸於牆壁兩端高度。
4. 繩上各點張力之水平分量相同。
5. 最低點繩子的拉力方向僅為水平方向，張力最小
6. AC 段繩子長度為 $\dfrac{W_{AC}}{W}L$



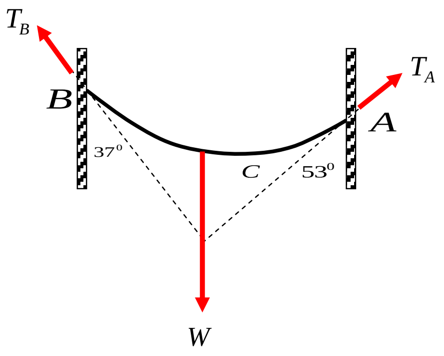
例題：

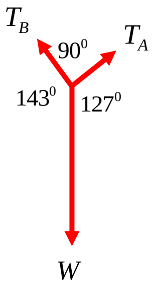
如圖所示，一柔軟鐵鍊懸吊於二牆之間，鏈重 W，A 點切線與牆夾角 53^0，B 點切線與牆夾角 37^0，C 為最低點，則



(A) A 點之張力為 4W/5
(B) B 點之張力為 3W/5
(C) C 點之張力為 W
(D) C 點的張力最大
(E)各點張力之水平分量相同
(F)鐵鍊 AC 段與 BC 段長度比為 9：16

［解析］： **(E)(F)**

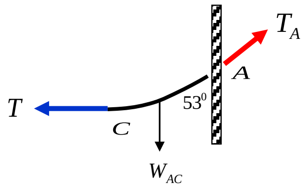




$$\frac{W}{\sin 90^0}=\frac{T_A}{\sin 143^0}=\frac{T_B}{\sin 127^0}$$

$$\frac{W}{\sin 90^0}=\frac{T_A}{\sin 37^0}=\frac{T_B}{\sin 53^0}$$

$$\boxed{T_A=\frac{3}{5}W} \qquad \boxed{T_B=\frac{4}{5}W}$$



$$\sum F_x=0$$

(C) $\boxed{T=T_A\sin 53^0=\frac{12}{25}W}$

C 點的張力最小

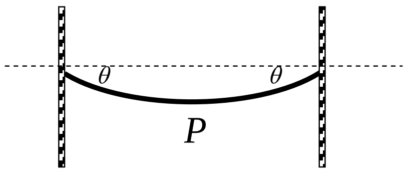
(F) $W_{AC}=T_A\cos 53^0=\dfrac{9}{25}W$

$$L_{AC}:L_{BC}=9:16$$

$W_{BC}=T_B\cos 37^0=\dfrac{16}{25}W$

例題：

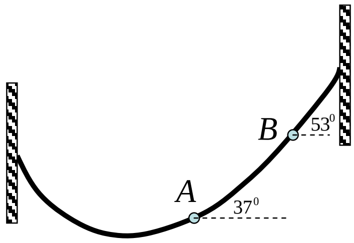
如圖所示，一鏈條重 W，懸於左右同高度兩鈎間，在兩端鏈與水平成 θ 角，(1)左鈎作用於鏈上之力大小為何？(2)鏈條最低點 P 繩上的張力為若干？



［解析］：

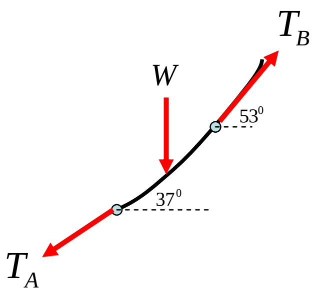
(1) $\dfrac{W\csc\theta}{2}$ **(2)** $\dfrac{W\cot\theta}{2}$

例題：



均勻之粗繩掛在二鉛直壁間而成平衡，如圖所示。若繩上 A、B 兩點切線與水平夾角分別為 37^0 與 53^0，且 A、B 點間繩重為 W，則此繩最低點之張力為若干？

[解析]：



$$\sum F_x = 0 \qquad T_B\cos 53^0 - T_A\cos 37^0 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad T_B\sin 53^0 - T_A\sin 37^0 - W = 0$$

$$T_A = \frac{15}{7}W \qquad T_B = \frac{20}{7}W$$

繩上各點張力之水平分量相同：$T_A\cos 37^0 = \dfrac{12}{7}W$

例題：

如圖所示，均勻的粗繩，懸掛在兩鉛直牆壁間成平衡。若繩的兩端 A、B 點繩的切線與鉛直牆夾角各為 θ_1 及 θ_2 (B 點較 A 點高)，繩的 C 點為最低點，繩上 A、B、C 各點張力依次為 T_1、T_2、T_3，下列敘述何者正確？

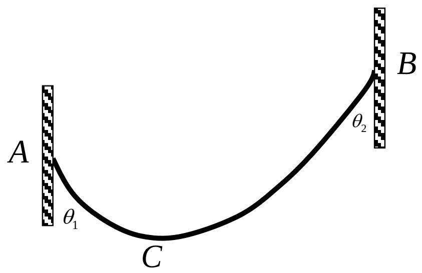
(A) $\theta_1 > \theta_2$

(B) T_1 最大

(C) T_2 最大

(D) T_3 最小

(E)任一點張力之水平分量均相同



[解析]：

(A)(C)(D)(E)

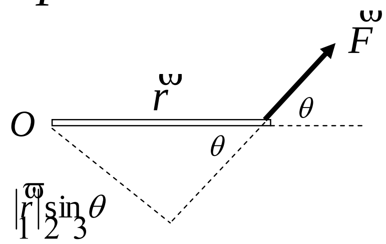
第 3-4 節 力矩和力偶

物體因受力而發生旋轉的狀態變化，稱為力矩。

力矩：$\vec{M}$　　位置向量：$\vec{r}$　　施力：$\vec{F}$

定義：$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}\,(\mathrm{N\text{-}m})$

$$\left|\vec{M}\right|=\left|\vec{r}\right|\left|\vec{F}\right|\sin\theta=\left|\vec{F}\right|\underbrace{\left|\vec{r}\right|\sin\theta}_{力臂}$$



(1)力臂：轉軸(支點) O 至力 F 作用線的垂直距離

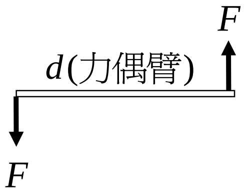
(2)逆時針方向的力矩取為正

力偶：物體受到大小相等、方向相反、而不作用在同一直線上的兩力，此兩作用力稱為力偶。

(1)合力：$F-F=0$

(2)合力矩(力偶矩)：$M=Fd$

(3)例如：旋轉水龍頭、瓶蓋。



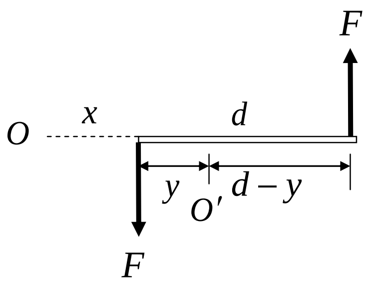
(4)力偶所產生的力偶矩，相對於任一轉軸皆相同。

[證明]：

$$M_0=F(x+d)-Fx=Fd$$

$$M_{0'}=F(d-y)+Fy=Fd$$

$$M_0=M_{0'}$$



例題：

下列有關力矩的敘述何者正確？

(A)力矩的方向即為作用力的方向

(B)力矩的量值恆與作用力的量值成正比

(C)對相同的作用力而言，力臂越長時，其力矩的量值也越大

(D)力矩是純量，因此沒有方向性

(E)力矩與參考點的位置無關

(F)力矩可以使物體移動一段距離

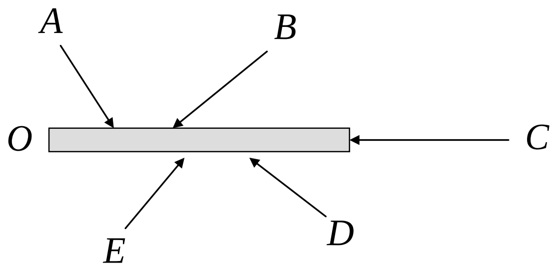
(G)力矩的單位可寫成 公斤-公尺

[解析]：

(C)

例題：

有數個力作用於輕桿上，如圖所示，若取桿子左端的 O 點為參考點，計算各力造成的力矩時，則力矩方向為垂直離開紙面的有幾個？

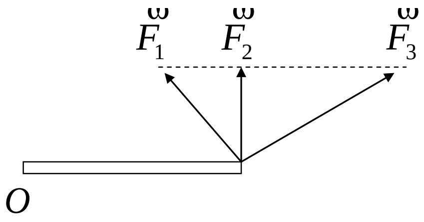


[解析]：

2 個

例題：

一木棒的一端固定於 O 點，在另一端施力分別 $\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$、$\vec{F}_3$ 三力，圖中虛線與棒平行，三者中對通過 O 點的轉軸所產生的力矩大小依序為 τ_1、τ_2、τ_3，則其大小關係為何？



［解析］：

$$\tau_1=\tau_2=\tau_3$$

例題：

一物體同時受二力作用，$\vec{F}_1=-3\hat{i}+4\hat{j}\,(N)$ 作用點 $\vec{r}_1=4\hat{i}+3\hat{j}\,(m)$ 與 $\vec{F}_2=3\hat{i}+3\hat{j}\,(N)$ 作用點 $\vec{r}_2=-3\hat{i}+2\hat{j}\,(m)$

(1)求二力對原點產生的力矩分別為多少？

(2)總力矩為多少？

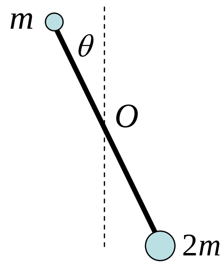
［解析］：

(1) $$\vec{M}_1=\vec{r}_1\times\vec{F}_1=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 4 & 3 & 0\\ -3 & 4 & 0\end{vmatrix}=25\hat{k}\,(N-m)$$

$$\vec{M}_2=\vec{r}_2\times\vec{F}_2=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ -3 & 2 & 0\\ 3 & 3 & 0\end{vmatrix}=-15\hat{k}\,(N-m)$$

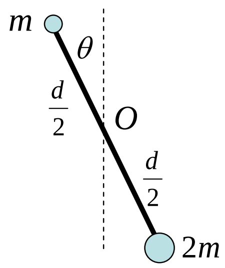
(2) $$\vec{M}=\vec{M}_1+\vec{M}_2=10\hat{k}\,(N-m)$$

例題：



一長度為 d，質量可忽略不計的細桿，其中心點 O 固定，兩端各置有質量為 m 及 2m 的質點。細桿與鉛直方向夾角為 θ，設重力加速度為 g，則重力對 O 點所產生的力矩大小為多少？

［解析］：

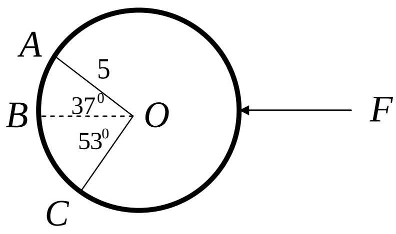


$$\vec{M}_0 = [mg(\frac{d}{2}\sin\theta) - 2mg(\frac{d}{2}\sin\theta)]\vec{k}$$

$$\vec{M}_0 = -\frac{1}{2}mgd\sin\theta\vec{k}$$

$$\left|\vec{M}_0\right| = \frac{1}{2}mgd\sin\theta$$

例題：



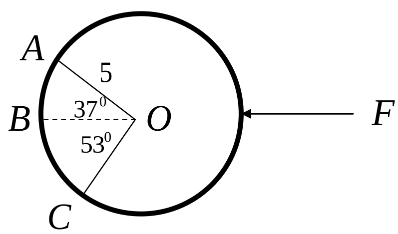
如圖所示，以 10 牛頓的力 F 沿圖示之方向作用於半徑 5 公尺之圓盤。則 F 對 A、B、C 三點的力矩其大小各為多少？

［解析］：

$$M_A = 10\times 5\sin 37^0 = 30\,(N-m)$$

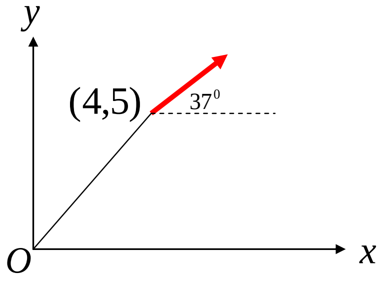
$$M_B = 0$$

$$M_C = 10\times 5\sin 53^0 = 40\,(N-m)$$



例題：

在 xy 平面上，一力大小為 10 N 與 x 軸夾角成 37^0 施力，如圖所示，著力點座標為 (4 m ，5 m)，求此力對原點所生的力矩大小？



[解析]：

$$\vec{F}=10(\cos 37^0\,\vec{i}+\sin 37^0\,\vec{j})=8\vec{i}+6\vec{j}\,(N)$$

$$\vec{M}_o=\vec{r}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 8 & 6 & 0\\ 4 & 5 & 0\end{vmatrix}=16\vec{k}\,(N-m) \qquad \left|\vec{M}\right|_o=16\,(N-m)$$

靜力平衡條件

(1)合力為零 $\sum\vec{F}=\dfrac{d(m\vec{v})}{dt}=0$

可推得動量守恒 $m\vec{v}=$常數

(2)合力矩為零 $\sum\vec{M}=\dfrac{d(\vec{r}\times m\vec{v})}{dt}=0$

可推得角動量守恒 $\vec{r}\times m\vec{v}=$常數

例題：

下列敘述何者正確？

(A)數力作用於物體上，物體必定平衡

(B)物體受力而平衡時，則物體必定靜止

(C)三力作用於物體上而平衡時，三力作用線必通過同一點

(D)三力作用於物體上而平衡時，三力不是互相平行，便是通過同一點

(E)施一力使門打開的轉動效力，與力和力臂的乘績成正比

[解析]：

(D)(E)

例題：

在靜力平衡實驗中，下列敘述何者正確？

(A)力桌是否水平不會影響實驗結果

(B)在實驗的整個過程中，銅環或圓盤應一直保持與力桌中心的插栓接觸，以防止其滑動

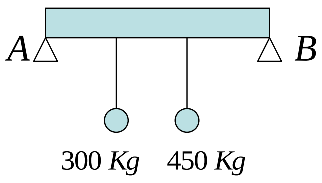
(C)在達到平衡時，施於銅環上之諸力，以實際量得所做之向量圖有可能不封閉

(D)在圓盤達到平衡時，做用於圓盤上之諸力對於任何軸之力矩和，理論上均應為零

(E)若有三個不互相平行的共平面力作用於圓盤上，在圓盤達平衡時，理論上這三個力一定交於一點

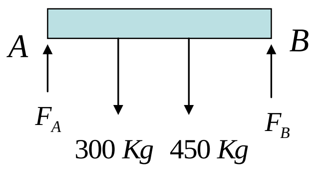
[解析]： **(C)(D)(E)**

例題：



一橫樑其本身重量可不計，長度為 L，支持於 AB 兩端，如圖所示。距 A、B 兩端 L/3 處各置一重 300 Kg 及 450 Kg 的物體，試求 A 與 B 兩端的支持力各為若干？

[解析]：



$$\sum \vec{M}_A = 0 \quad \Rightarrow \quad -300\left(\frac{L}{3}\right) - 450\left(\frac{2L}{3}\right) + F_B L = 0$$

$$F_B = 400\ (kgw)$$

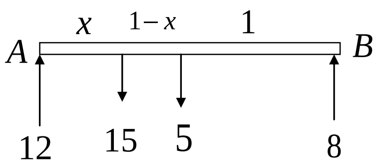
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad F_A - 300 - 450 + F_B = 0$$

$$F_A = 350\ (kgw)$$

例題：

A、B 兩人以一質量為 5 公斤、長度為 2 公尺的均勻木棒，抬一質量為 15 公斤的物體，欲使 A 負擔總重量的 3/5，則物體應懸掛於距 A 端多少公尺遠？

[解析]：



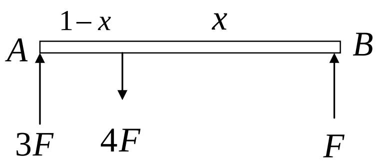
$$\sum \vec{M}_A = 0 \quad \Rightarrow \quad -15x - 5\times 1 + 8\times 2 = 0$$

$$x = \frac{11}{15}\ (m)$$

例題：

甲、乙兩人挑一扁擔，扁擔長 1 公尺，不計重量，上掛一乳豬。已知甲出力為乙的三倍，則乳豬距乙多遠？

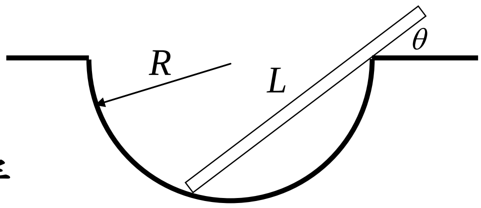
[解析]：



$$\sum \vec{M}_B = 0 \quad \Rightarrow \quad -3F \times 1 + 4Fx = 0$$

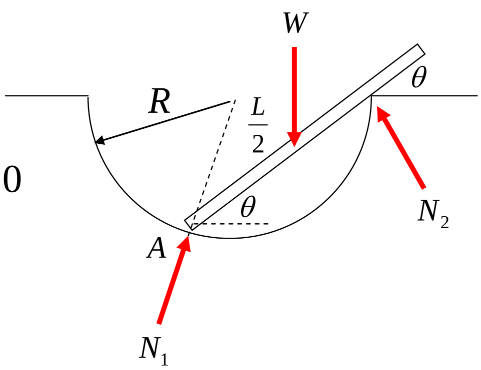
$$x = \frac{3}{4}\,(m)$$

例題：



如圖所示，一均勻光滑長為 L、重 W 之木棒，靜止放在半徑 R 的半球形碗內而成平衡，$R < \frac{L}{2} < 2R$ 。若 θ 角為平衡時木棒與水平的夾角，則平衡時碗邊對木棒所施的作用力為何？

[解析]：

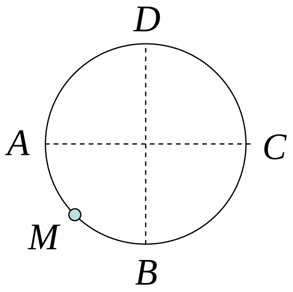


$$\sum \vec{M}_A = 0 \quad \Rightarrow \quad -W \times \frac{L}{2}\cos\theta + N_2 L = 0$$

$$N_2 = \frac{W}{2}\cos\theta$$

例題：

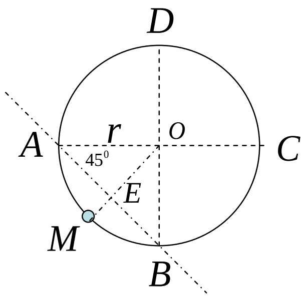
一圓桌重 W，圓周上共有四腳 A、B、C、D 支持之，如圖所示，今在兩腳 A、B 的中點 M 處(桌邊上)置重物 x 的物體，若桌不致於傾倒，則 x 的最大值為 W 的幾倍？



[解析]：

在 M 點施力，則 C、D 腳有可能撬起。

因此撬起時是以 A、B 為支撐點，AB 為旋轉軸。 $\overline{AB}\perp\overline{OM}$ 於 E 點。



$$\overline{OE}=r\sin 45^0=\frac{r}{\sqrt{2}} \qquad \overline{ME}=r-\frac{r}{\sqrt{2}}$$

圓桌重 W 作用於重心 O 處。若桌不致於傾倒

$$\sum M_O \ge 0 \qquad x(r-\frac{r}{\sqrt{2}})\ge W\frac{r}{\sqrt{2}}$$

$$x\ge\frac{1}{\sqrt{2}-1}W=(\sqrt{2}+1)W$$

例題：

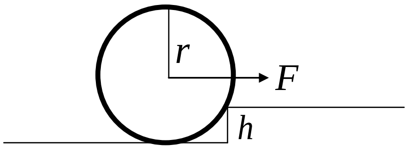
一輪重 200 Kg，半徑 r = 10 厘米，

欲使此輪滾上高 h = 4 厘米的台階，則

(1)若此水平力通過輪心，則其最小值為若干？

(2)若此水平力作用於輪上任一點，則最小水平推力為若干？

(3)若此力(不需水平力)作用於輪上任一點，至少需力若干？

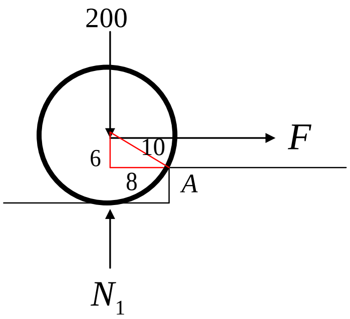


[解析]：

(1) 當輪滾上台階，則 $N_1 = 0$

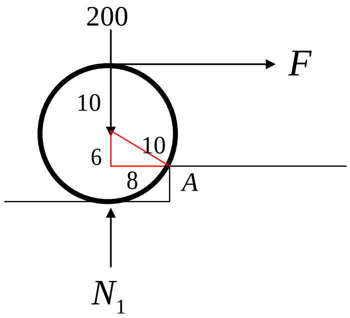
$$\sum \overset{\omega}{M}_A = 0 \qquad 200 \times 8 - F \times 6 = 0$$

$$F = \frac{800}{3}\,(kgw)$$

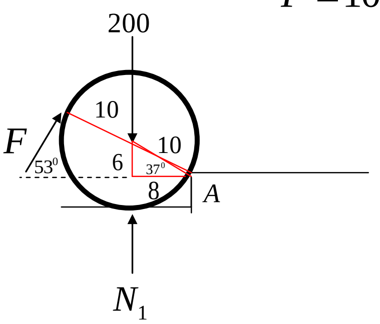


(2) $\sum \overset{\omega}{M}_A = 0 \qquad 200 \times 8 - F \times 16 = 0$

$$F = 100\,(kgw)$$



(3)



$$\sum \overset{\omega}{M}_A = 0 \qquad 200 \times 8 - F \times 20 = 0$$

$$F = 80\,(kgw)$$

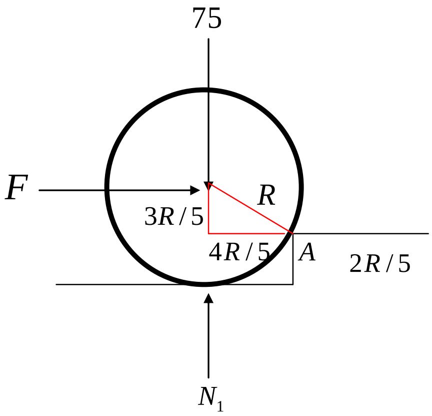
例題：

一水平置放之圓柱體半徑為 R，重量為 75 Kg。今以通過其中心之方向施一水平推力，使其滾過一台階，若台階高度 h = 2R/5，則所需最小推力為若干？

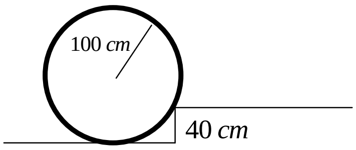
[解析]：

$$\sum \vec{M}_A = 0 \quad 75 \times \frac{4R}{5} - F \times \frac{3R}{5} = 0$$

$$F = 100\,(kgw)$$



例題：



如圖所示，一重 100 kgw 之圓球，半徑為 100 cm，階梯高 40 cm，則

(A)若欲施一通過圓心的水平力，使其滾上台階，則最小力為 75 kgw

(B)續(A)，恰要滾上時，重力產生的力矩大小為 8000 cm-kgw

(C)欲以最小水平力使其滾上台階，則此力大小為 50 kgw

(D)欲以最小力使其滾上台階，則此力大小為 40 kgw

(E)續(D)，施力方向為水平仰角 53^0

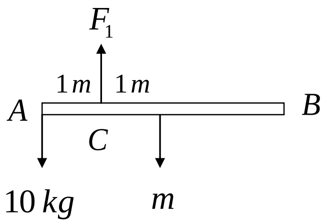
[解析]：

(B)(C)(D)(E)

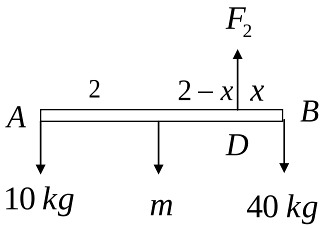
例題：

一均勻重棒長 4 m，一端 A 懸以 10 Kg 之重物時，需在離 A 端 1 m 處提起始能平衡，若在另一端 B 再掛以 40 Kg 之重物時，應在何處提起才能保持棒的平衡？

[解析]：



$$\sum \vec{M}_C = 0 \qquad 10 - m = 0 \qquad m = 10$$



$$\sum \vec{M}_D = 0$$

$$10(4-x)+m(2-x)-40x=0$$

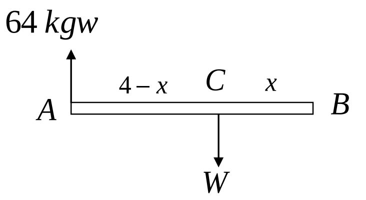
$$x = 1\,(m)$$

例題：

水平地面上放置一密度不均勻的直桿 AB 長 4 m，欲將 A 端提起，最小需力 64 Kgw。欲將 B 端提起，則最少需力 80 Kgw。求

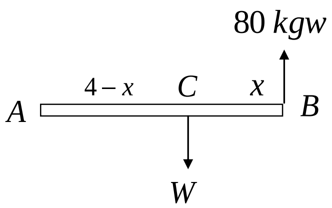
(1)桿的質量幾公斤？　(2)桿的重心距離 B 端多少公尺？

[解析]：



$$\sum \vec{M}_B = 0 \qquad -64\times 4 + Wx = 0$$

$$\sum \vec{M}_A = 0 \qquad -W(4-x)+80\times 4 = 0$$

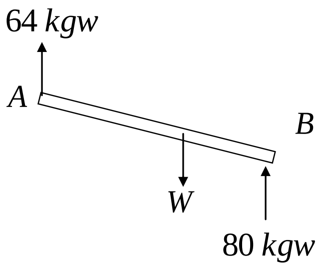


$$W = 144\,(kg) \qquad x = \frac{16}{9}\,(m)$$

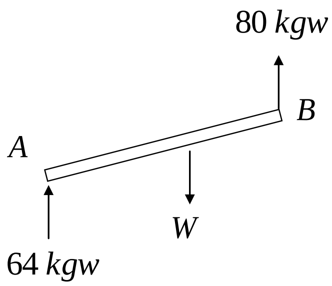
[觀念]：

當一組平行力平衡時，所需作用力的大小與直桿的傾斜角度無關。

當 A 端提起時



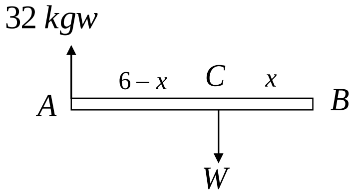
當 B 端提起時



例題：

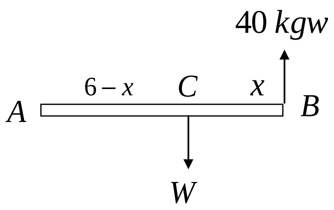
水平地面上一不均勻直桿 AB，長為 6 公尺，欲將 A 端提起(此時 B 端著地)，最少需力 32 Kgw，此時仰角 53^0。欲將 B 端提起(此時 A 端著地)，最少需力 40 Kgw，此時仰角 60^0。則桿的質量為幾公斤？

[解析]：



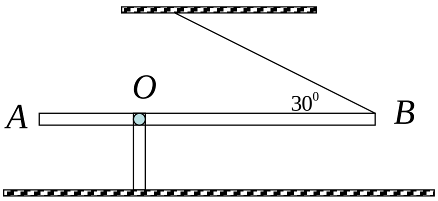
$$\sum \vec{M}_B = 0 \qquad -32\times6+Wx=0$$

$$\sum \vec{M}_A = 0 \qquad -W(6-x)+40\times6=0$$



$$W=72\,(kg) \qquad x=\frac{8}{3}\,(m)$$

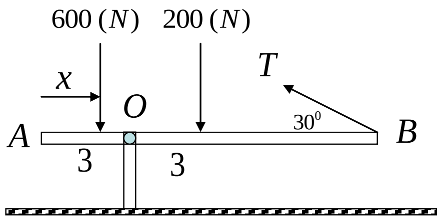
例題：



一塊均勻的木板 AB，長為 12 公尺，重 200 牛頓。距 A 端 3 公尺處有一固定轉動軸 O，另一端 B 以細繩懸住，使板呈水平狀態，繩和木板的夾角為 30^0。如果繩能承受的最大拉力為 200 牛頓，那麼要使一個重 600 牛頓的人在該板上安全行走，他距 A 點的活動範圍應該多大？

［解析］：

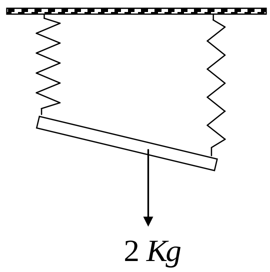
$$\sum \vec{M}_O = 0 \quad 600(3-x) - 200\times 3 + T\sin 30^0 \times 9 = 0 \quad T = \frac{400x-800}{3}$$



$$0 \le T \le 200 \qquad 0 \le \frac{400x-800}{3} \le 200$$

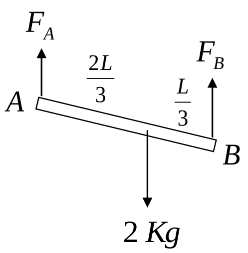
$$2 \le x \le 3.5$$

例題：



設有一重 2 Kg 之重棒，用兩個相同之彈簧吊起，如圖所示。彈簧之力常數為 400 N/m，重棒的質量中心在離一端 1/3 長度處，則二彈簧伸長長度之差約為多少？(g=10 m/s²)

［解析］：



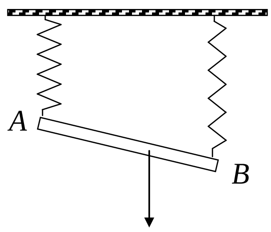
$$\sum \vec{M}_A = 0 \quad -2g\times\frac{2L}{3} + F_B L = 0 \quad F_B = \frac{40}{3}\,(N)$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_B + F_A - 2g = 0 \quad F_A = \frac{20}{3}\,(N)$$

$$F_B - F_A = k\Delta x \;\Rightarrow\; \frac{20}{3} = 400\Delta x \;\Rightarrow\; \Delta x = \frac{1}{60}\,(m)$$

例題：

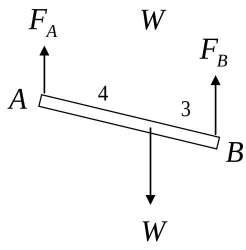
一均勻輕桿的兩端 A 及 B，分別與力常數為 k_1 及 k_2 之二垂直彈簧連接，一物體重 W 懸於桿上，距 A 端為 x_1，距 B 端為 x_2，使桿沿水平平衡，若 $x_1：x_2 = 4：3$，$k_1：k_2 = 1：2$，且不計桿及彈簧的重量，則兩彈簧伸長量之比為多少？



[解析]：

$$\sum \overset{\omega}{M}_A = 0 \qquad -W\times4+F_B\times7=0 \qquad F_B=\frac{4W}{7}$$

$$\sum F_y = 0 \qquad F_A+F_B-W=0 \qquad F_A=\frac{3W}{7}$$



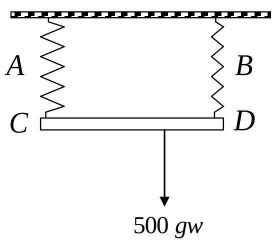
$$\Delta x_A:\Delta x_B=\frac{F_A}{k_1}:\frac{F_B}{k_2}=\frac{\frac{3W}{7}}{1}:\frac{\frac{4W}{7}}{2}=3:2$$

例題：

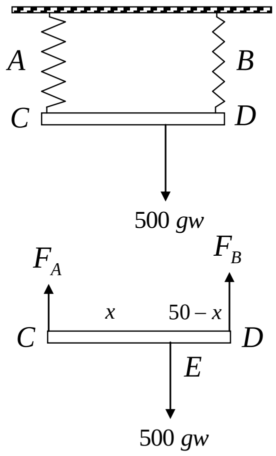
如圖所示，有等長的 A、B 兩彈簧，A 懸 100 gw 時伸長 2 cm，B 懸 100 gw 時伸長 3 cm。今將兩彈簧並聯後，在下端掛一長 50 cm 的 CD 棒(棒重不計），在棒下掛 500 gw 的物體

(1)欲使棒成水平，則物體應掛於距 C 端多遠？

(2)此時 A、B 兩彈簧各伸長多少？



[解析]：



(1) $100 = 2k_A \quad \Rightarrow \quad k_A = 50\,(gw/cm)$

$100 = 3k_B \quad \Rightarrow \quad k_B = 100/3\,(gw/cm)$

因 CD 棒成水平，兩彈簧伸長量相等

設彈簧伸長量為 y

$$\frac{F_A}{F_B} = \frac{k_A y}{k_B y} \quad \Rightarrow \quad \frac{F_A}{F_B} = \frac{k_A}{k_B} = \frac{3}{2}$$

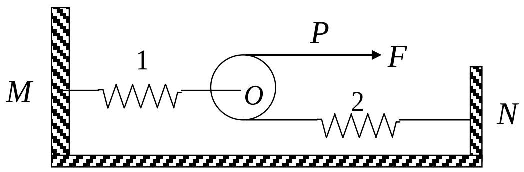
$$\sum \vec{M}_E = 0 \qquad -F_A x + F_B(50 - x) = 0 \qquad x = 20\,(cm)$$

(2) $\sum F_y = 0 \qquad F_A + F_B - 500 = 0 \qquad F_A = 300\,(gw)$

$$F_A = 300 = k_A y \quad \Rightarrow \quad y = 6\,(cm)$$

例題：

如圖所示，彈簧 1、2 的彈力常數均為 k，質量可忽略不計。將彈簧 1 的一端固定在牆上的 M 點，另一端固定輕質滑輪的軸心 O 上。彈簧 2 的一端固定在牆上的 N 點，另一端連結一根不可伸長的細線，細線跨過同一滑輪，其摩擦可忽略不計。若用大小為 F 的力沿水平向右拉細繩的 P 端，並保持彈簧、細繩均與地面平行，使系統成平衡狀態。今若緩慢的將拉力增大至 2F，則細繩 P 端將水平向右移動一段距離，其長度為何？



[解析]：

設彈簧 1 的位移量為 x_1，彈簧 2 的位移量為 x_2 。

因處於平衡狀態 $\sum M_A = 0 \quad -kx_1 r + kx_2(2r) = 0 \quad x_1 = 2x_2$

表示彈簧 1 的伸長量為彈簧 2 伸長量的 2 倍。

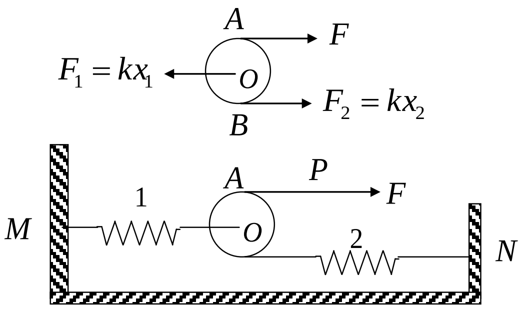
當施力 F 時 $\sum M_B = 0 \quad -F(2r) + F_1(r) = 0$

$$F_1 = 2F \qquad F_2 = F$$

彈簧 1 的伸長量： $x_1 = \dfrac{2F}{k}$

彈簧 2 的伸長量： $x_2 = \dfrac{F}{k}$

彈簧 1、2 皆為伸長狀態



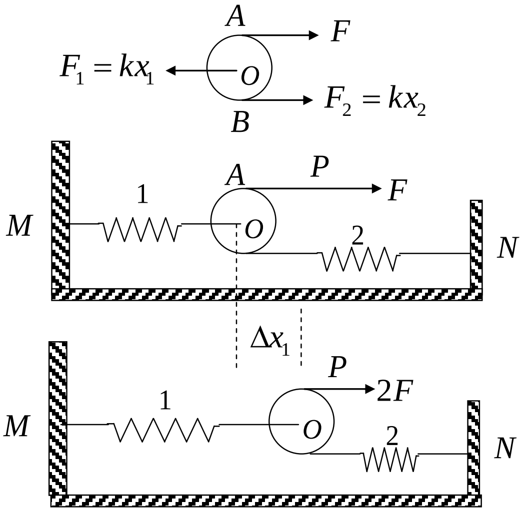
當施力 2F 時 $\sum M_B = 0 \quad -2F(2r) + F_{1'}(r) = 0$

$$F_{1'} = 4F \qquad F_{2'} = 2F$$

彈簧 1 的伸長量： $x_{1'} = \dfrac{4F}{k}$

彈簧 2 的伸長量： $x_{2'} = \dfrac{2F}{k}$

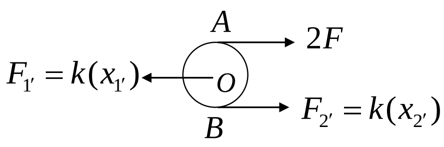
彈簧 1、2 皆為伸長狀態



當施力由 F 增為 2F 時

彈簧 1 增長： $\Delta x_1 = x_1 - x_{1'} = \dfrac{2F}{k}$

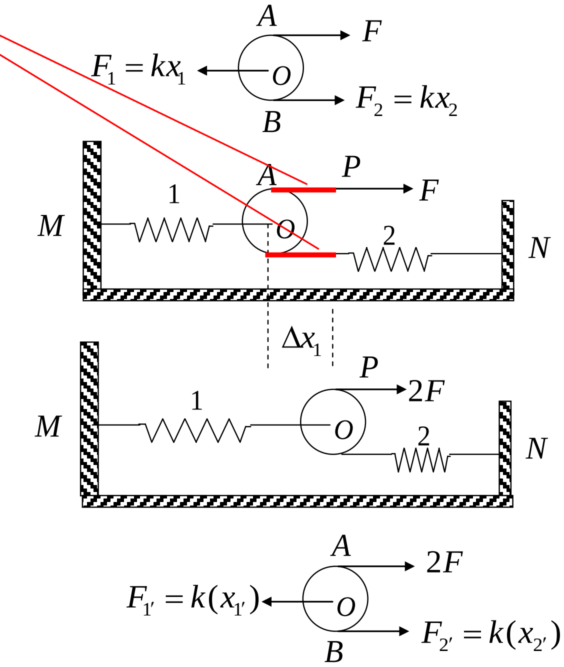
彈簧 2 增長： $\Delta x_2 = x_2 - x_{2'} = \dfrac{F}{k}$



彈簧 1、2 皆為伸長狀態

當彈簧 1 增長(右移) $\Delta x_1=\dfrac{2F}{k}$，圓環 O 右移 $\Delta x_1=\dfrac{2F}{k}$，因此 F 需右移 $2\Delta x_1=\dfrac{4F}{k}$ 才能拉緊彈簧 2。但彈簧 2 亦增長 $\Delta x_2=\dfrac{F}{k}$，因此 F 需再右移 $\Delta x_2=\dfrac{F}{k}$ 才能拉緊彈簧 2。因此，F 總伸長量

$$\underbrace{\frac{4F}{k}+\frac{F}{k}}_{\text{彈簧 2 伸長量}}=\frac{5F}{k}$$

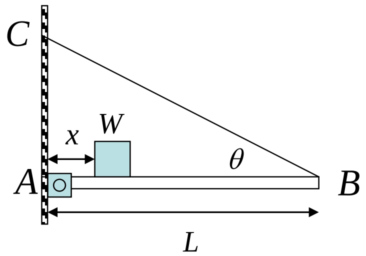


例題：

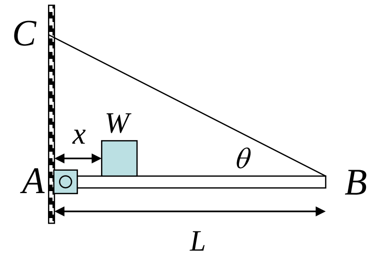
長為 L，重量可忽略之水平細桿 AB，A 端以樞鈕固定於牆上， B 端則由與水平成 θ 角之細線 BC 支持著，重物 W(大小不計)可沿桿任意移動，其與牆之距離為 x，如圖所示，則

(1)求繩之張力 T，以 x 函數表示

(2)求 A 點之水平與垂直作用力

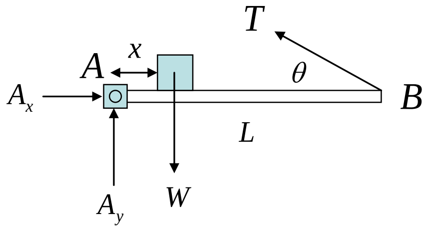


[解析]：



(1) $\sum \overset{\omega}{M}_A = 0 \quad -Wx + T\sin\theta \times L = 0$

$$T = \frac{W}{L\sin\theta}x$$



(2) $\sum F_x = 0 \quad A_x - T\cos\theta = 0$

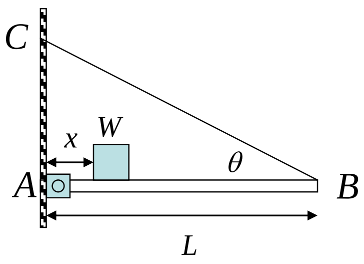
$$A_x = T\cos\theta = \frac{W}{L\sin\theta}x\cos\theta = \frac{W\cot\theta}{L}x$$

$$\sum F_y = 0 \quad A_y - W + T\sin\theta = 0$$

$$A_y = W - T\sin\theta = W - \frac{W}{L\sin\theta}x\sin\theta = (1-\frac{x}{L})W$$

例題：

長為 L，重量可忽略之水平細桿 AB，A 端以樞鈕固定於牆上， B 端則由與水平成 θ 角之細線 BC 支持著，重物 W(大小不計)可沿桿任意移動，其與牆之距離為 x，如圖所示。今將木棒上重物之位置逐漸右移，則下列何者將隨之增大？



(A)樞鈕施於木棒作用力的水平分量

(B)樞鈕施於木棒作用力之鉛直分量

(C)樞鈕施於木棒作用力方向與水平方向的夾角

(D)細線 BC 上張力的大小

(E)施於木棒的三作用力方向延長線交點與 B 端的距離

[解析]： **(A(D)**

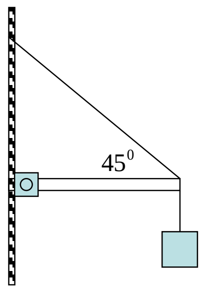
例題：

如圖所示，一均勻木棒長 20 cm，重量可忽略，一端以樞鈕固定於牆上，另一端懸 0.1 Kg 的物體，並以一繩繫該端點，使成 45^0 固定於牆，恰可使木棒水平，求

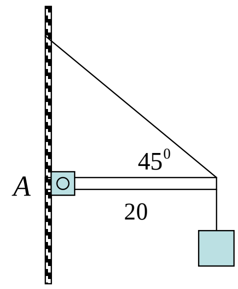
(1)繩的張力為多少？

(2)樞鈕對木棒所施的水平作用力、鉛直作用力為多少？

(3)樞鈕對木棒所施的作用力為多少？

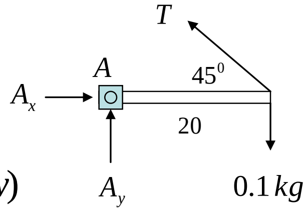


[解析]：



(1) $\sum \vec{M}_A = 0 \quad -0.1\times 20 + T\sin 45^0 \times 20 = 0$

$$T = \frac{\sqrt{2}}{10}\,(kgw)$$



(2) $\sum F_x = 0 \qquad A_x - T\cos\theta = 0$

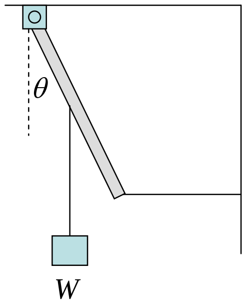
$$A_x = T\cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{10}\cos 45^0 = \frac{1}{10}\,(kgw)$$

$\sum F_y = 0 \qquad A_y - 0.1 + T\sin 45^0 = 0$

$$A_y = 0.1 - \frac{\sqrt{2}}{10}\sin 45^0 = 0$$

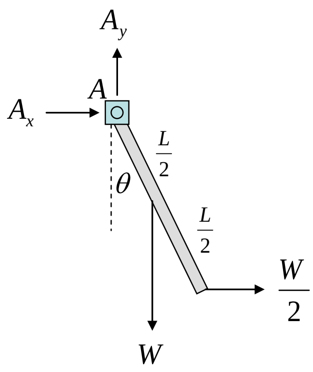
(3) 樞鈕對木棒所施的作用力： $A_x = \frac{1}{10}\,(kgw)$

例題：



長 L 質量可忽略的木棒，上端以樞鈕固定，另端以水平繩固定在牆上，中央懸一重物 W 恰可平衡，如圖所示。若繩的張力為 W/2，則木棒與鉛直方向夾角為若干？樞鈕作用力為多少？

［解析］：



$$\sum \vec{M}_A = 0 \qquad -W \times \frac{L}{2}\sin\theta + \frac{W}{2} \times L\cos\theta = 0$$

$$\tan\theta = 1 \qquad \theta = 45^0$$

$$\sum F_x = 0 \qquad A_x - \frac{W}{2} = 0 \qquad A_x = \frac{W}{2}$$

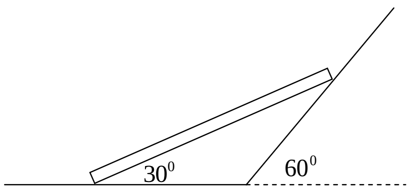
$$\sum F_y = 0 \qquad A_y - W = 0 \qquad A_y = W$$

例題：

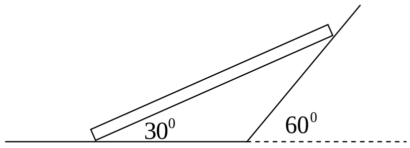
一均勻棒重 W，一端置於光滑地面上，另一端置於斜角為 60^0 的光滑斜面上，若此棒與地面成 30^0 角，求

(1)需在棒的下端水平用多少力推此棒，棒才能平衡？

(2)斜面與地面對棒的作用力各為多少？

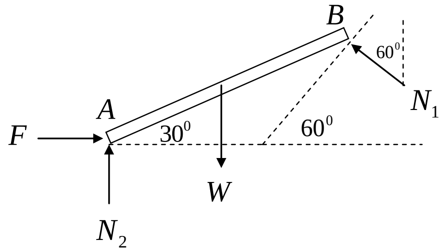


［解析］：



(1) $\vec{r}_{B/A} = L\cos 30^0 \vec{i} + L\sin 30^0 \vec{j}$

$\vec{N}_1 = -N_1 \sin 60^0 \vec{i} + N_1 \cos 60^0 \vec{j}$

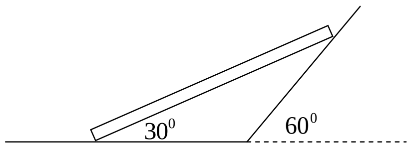


$$\sum \vec{M}_A = \vec{r}_{B/A} \times \vec{N}_1 - W\frac{L}{2}\cos 30^0 \vec{k} = 0$$

$$\sum \vec{M}_A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ L\cos 30^0 & L\sin 30^0 & 0 \\ -N_1 \sin 60^0 & N_1 \cos 60^0 & 0 \end{vmatrix} - W\frac{L}{2}\cos 30^0 \vec{k} = 0$$

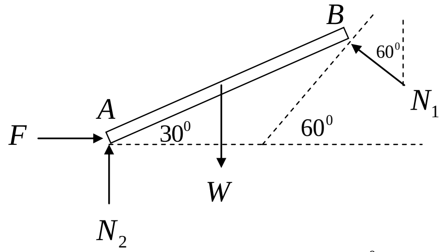
$$(\frac{\sqrt{3}}{2}N_1 L)\vec{k} - (\frac{\sqrt{3}}{4}WL)\vec{k} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 = \frac{W}{2}$$

$$\sum F_x = 0 \qquad F - N_1 \sin 60^0 = 0 \qquad F = \frac{\sqrt{3}}{4}W$$

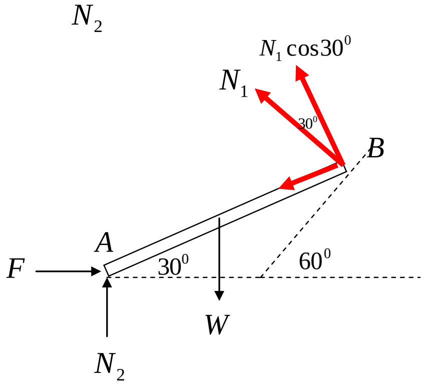


(2) $\sum F_y = 0 \quad N_2 - W + N_1 \cos 60^0 = 0$

$$N_2 = \frac{3}{4}W$$



［另解］：



$$\sum \vec{M}_A = N_1 \cos 30^0 L - W\frac{L}{2}\cos 30^0 = 0$$

$$N_1 = \frac{W}{2}$$

例題：

如圖所示，a、b 兩繩各與天花板成 60^0 及 30^0 之夾角，AB 為均勻質量之木棒，棒重 W。若平衡時 a、b 繩上之張力為 T_1 及 T_2，AB 棒與水平方向夾角 θ，則

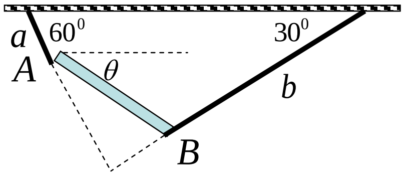
(A)重量 W 與張力 T_1、T_2 三力延長線通過同一點

(B) $T_1 + T_2 = W$

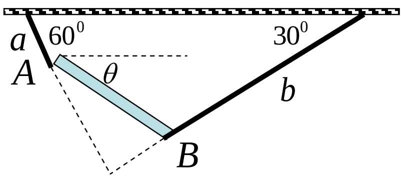
(C) $T_1 = \sqrt{3}W/2$

(D) $T_2 = W/2$

(E) $\theta = 30^0$



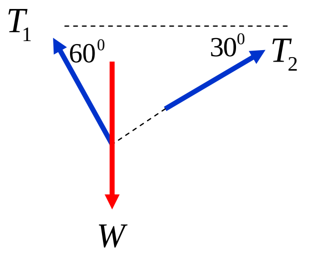
［解析］： **(A)(C)(D)(E)**



$$\sum F_x = 0 \qquad T_2 \cos 30^0 - T_1 \cos 60^0 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad T_2 \sin 30^0 + T_1 \sin 60^0 - W = 0$$

$$T_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}W \qquad T_2 = \frac{1}{2}W$$

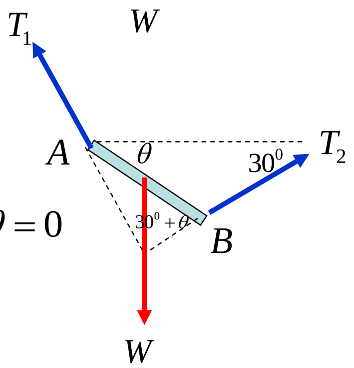


$$\sum \overset{\omega}{M}_B = 0$$

$$-T_1 \times L\cos(30^0 + \theta) + W \times \frac{L}{2}\cos\theta = 0$$

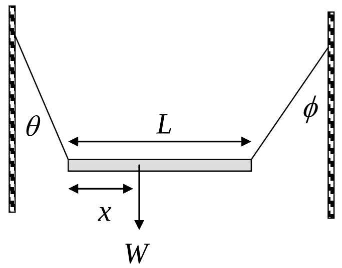
$$-\frac{\sqrt{3}}{2}W(\cos 30^0 \sin\theta - \sin 30^0 \cos\theta) + W \times \frac{1}{2}\cos\theta = 0$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \theta = 30^0$$

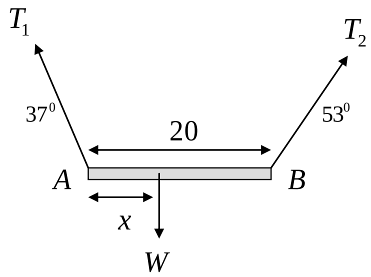


例題：

一不均勻之桿重 W，由二細繩懸掛於水平位置，如圖所示。一繩與牆之夾角為 $\theta = 37^0$，另一角 $\Phi = 53^0$。若桿長 L = 20 cm，則桿子的質心到左端之距離 x 為多少公分？



[解析]：



$\sum F_x = 0 \qquad T_2 \sin 53^0 - T_1 \sin 37^0 = 0$

$\sum F_y = 0 \qquad T_2 \cos 53^0 + T_1 \cos 37^0 - W = 0$

$$T_1 = \frac{4}{5}W \qquad T_2 = \frac{3}{5}W$$

$\sum \vec{M}_A = 0 \qquad -Wx + T_2 \cos 53^0 \times 20 = 0 \qquad x = 7.2\,(cm)$

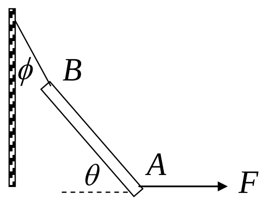
例題：

如圖所示，一均勻木棒 AB 棒重 W，A 端施一水平力 F，B 端繫一繩，繩一端結餘牆上。平衡時，繩與牆成 Φ 角，棒與水平成 θ 角，而繩子的張力為 T。下列敘述何者正確？

(A) $F = W \tan\phi$

(B) $T = W \sec\phi$

(C) $\cot\phi = 2\tan\theta$



(D)若 F 增加而 W 不變，則 θ 減少， Φ 增加

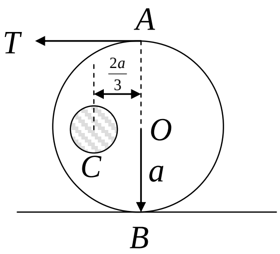
(E)若 F 減小而 W 不變，則繩子張力 T 亦增加

[解析]：

(A)(B)(C)(D)

例題：

圖中為重量 80 N，半徑 a 的某均勻圓柱體橫截面。今在圓柱體內挖去重量 15 N 的圓柱體(如圖所示）,此中空圓柱體的中心軸 C 與原圓柱體的中心軸 O 互相平行，而距離為 2a/3，則

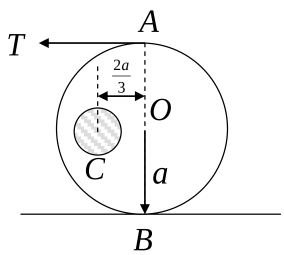


(1)挖去斜線部分後，重心右移多少距離？

(2)為避免圓柱體發生滾動，以一水平輕繩繫於 A 點，則 繩子拉力 T 應為多少，圓柱才不動？

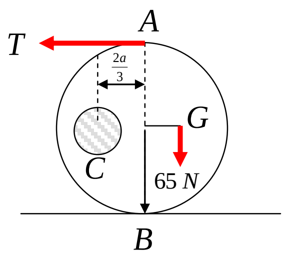
[解析]：

[解析]：



以 O 為參考原點

(1) $\vec{r}_G = \dfrac{80\times 0 - 15(-\frac{2a}{3})}{80-15} = \dfrac{10a}{65} = \dfrac{2a}{13}$



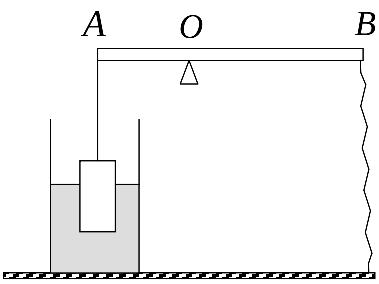
(2) $\sum \vec{M}_B = 0$

$$T\times 2a - 65\times\frac{2a}{13} = 0$$

$$T = 5\,(N)$$

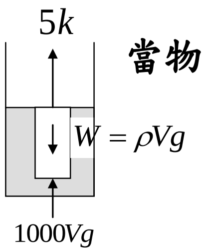
例題：

一實心物體浸沒在水中(不接觸容器底部)時，使原長 20 公分的彈簧伸長 5 公分，如果用此彈簧及一本身重量可忽略不計的桿子安裝成如圖所示的裝置，則當桿子在水平位置平衡時，彈簧伸長到 27.5 公分，此時物體有 1/5 的體積露出水面。求此物體的密度為何？已知圖中 $\overline{BO}=\frac{2}{3}\overline{AB}$，$g=10\ m/s^2$。



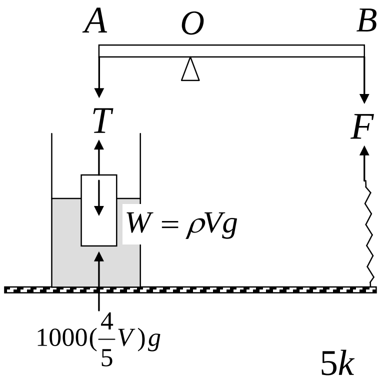
[解析]： **設物體密度為** ρ，**體積為** V，**水的密度** $\rho_w=1000\ kg/m^3$

彈簧彈性係數 $k\ (N/cm)$



當物體浸沒在水中時，彈簧伸長 5 cm

$$5k-\rho Vg+1000Vg=0$$



$$F=k(27.5-20)=7.5k$$

$$\overline{BO}:\overline{OA}=2:1$$

$$F\,\overline{BO}=T\,\overline{OA}\quad\Rightarrow\quad T=2(7.5k)=15k$$

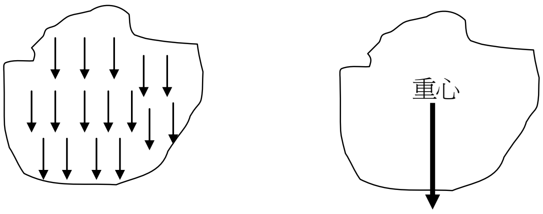
$$T-\rho Vg+1000(\frac{4}{5}V)g=0$$

$$\frac{5k}{15k}=\frac{\rho Vg-1000Vg}{\rho Vg-1000(\frac{4}{5}V)g}\qquad \rho=1100(kg/m^3)$$

第 3-6 節 重心

重心的意義：

一物體的重量均勻分佈於整個體積內，可將各部分受到重力的總和，視為集中作用於某一點，此點稱為該物體的重心。



質點系統重心位置求法：

平面座標系上質點重量分別為 w_1、w_2、…、w_n，其位置向量分別為 $\vec{r}_1$、$\vec{r}_2$、…、$\vec{r}_n$。若 G 為該質點系統的重心，則

$$\vec{r}_G=\frac{w_1\vec{r}_1+w_2\vec{r}_2+\cdots+w_n\vec{r}_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}$$

以重心 G 為支點，則各質點對重心的力矩和為零。

$$w_1\vec{r}_{1G}+w_2\vec{r}_{2G}+\cdots+w_n\vec{r}_{nG}=0$$

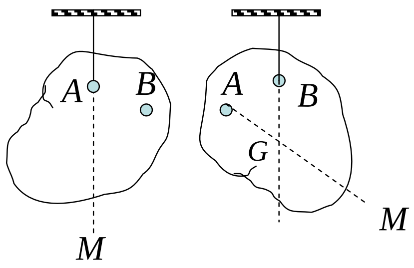
在均勻重力場中形狀規則物體的重心位置：

密度均勻的物體，其重心位置在幾何中心處。

1. 均勻正方形、長方形、平行四邊形的重心：兩對角線的交點。
2. 圓、圓環、球、球殼的重心：圓心或球心處
3. 三角形平板的重心：三中線交點處

在均勻重力場中不形狀規則物體的重心位置：

任取物體上不同的兩點 A、B，以小釘及線懸吊之。因重心的位置 G 必在通過懸點的鉛直線上，故兩鉛直線的交點 G 即為物體的重心。



例題：

下列敘述何者正確？

(A)一系統的重心可能位於此系統外空間某點

(B)重心對某一支點的力矩，應等於質心對同一點的力矩和

(C)一個物體僅有一個重心

(D)重心位置可能隨重力場之不同而改變

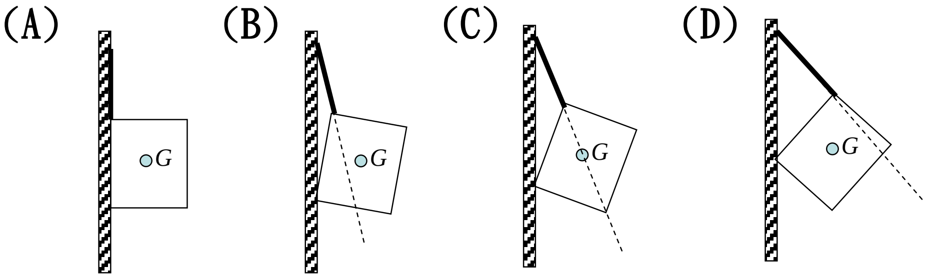
(E)在失重太空船內，重心無意義，但質心仍有意義

[解析]：

$(A)(B)(C)(D)(E)$

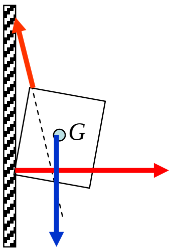
例題：

下列四圖表示一個空罐懸於牆上的情形，G 點為罐之重心。設牆為光滑者，故牆對罐之推力與牆垂直。問下列哪一情形最接近平衡狀態？



［解析］：

(B)需三力共點



例題：

有關重心的敘述，下列何者正確？

(A)一個系統的重心不一定有物質存在

(B)以物體的重心為支點，重力對物體不能產生轉動效果

(C)質點系統重心對某支點的力矩，必等於各質點重量對該支點的力矩和

(D)物體的重心超過其底面積範圍時，會呈現不平衡狀態

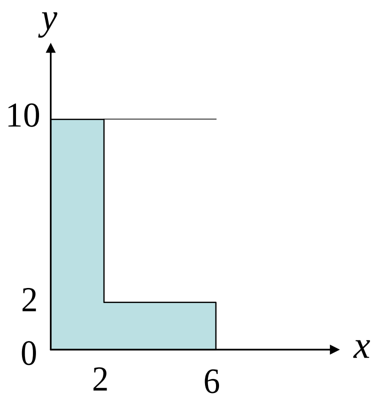
(E)在環繞地球運動的太空梭內，物體沒有重心

［解析］：

(A)(B)(C)(D)(E)

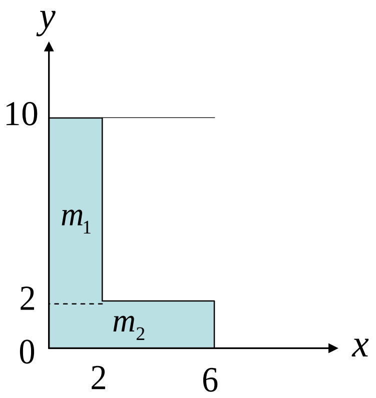
例題：

已知一均勻 L 形板，各邊長如圖所示，單位均為厘米。求此板重心位置座標？



[解析]：

$w_1 : w_2 =$ 面積比 $= 2\times(10-2) : 2\times 6 = 4:3$

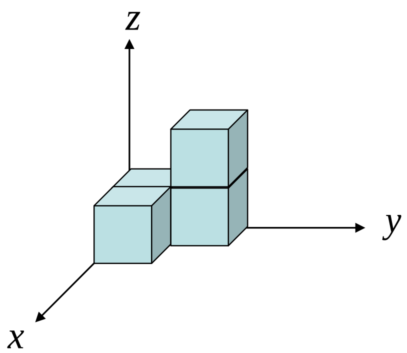


$$\vec{r}_G = \frac{w_1(1,6)+w_2(3,1)}{w_1+w_2}$$

$$= \frac{4(1,6)+3(3,1)}{4+3} = \left(\frac{13}{7},\frac{27}{7}\right)$$

例題：

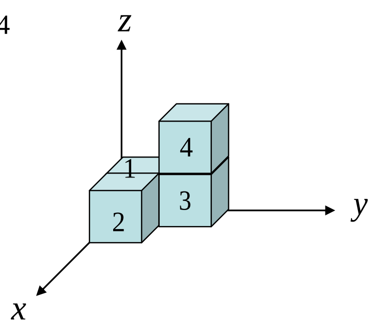
四個邊長 1 cm 的均勻立方體靠座標軸放置，如圖所示。求重心位置？



[解析]：

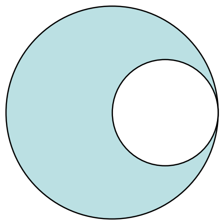
$$\vec{r}_G = \frac{w_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)+w_2\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)+w_3\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)+w_4\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)}{w_1+w_2+w_3+w_4}$$

$$= \left(\frac{3}{4},1,\frac{3}{4}\right)$$

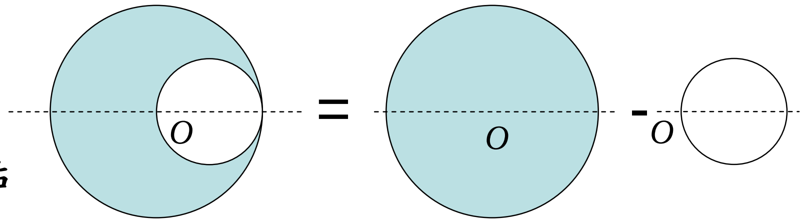


例題：

將一半徑為 r 的均勻球體，挖去一直徑為 r 的小球體(與大球體相切），則殘留部分的重心與原來的重心相距若干？



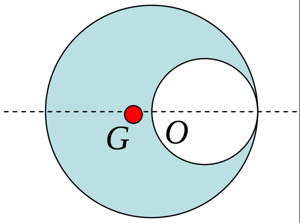
[解析]：



以 O 為參考原點

$$w_r : w_{r/2} = \text{體積比} = \frac{4\pi}{3}r^3 : \frac{4\pi}{3}\left(\frac{r}{2}\right)^3 = 8:1$$

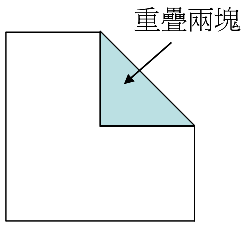
$$\vec{r}_G = \frac{w_r \times 0 - w_{r/2}\dfrac{r}{2}}{w_r - w_{r/2}} = \frac{8\times 0 - 1\times\dfrac{r}{2}}{8-1} = -\frac{r}{14}$$



$$\left|\vec{r}_G\right| = \frac{r}{14}$$

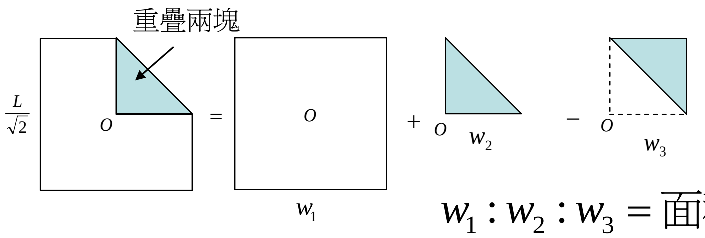
(負號表示重心位於原點左側)

例題：



設正方形均勻紙片之對角線長為 L，如圖將其中一角之頂點摺疊至正方形中心處，則紙片的重心至正方形中心的距離為何？

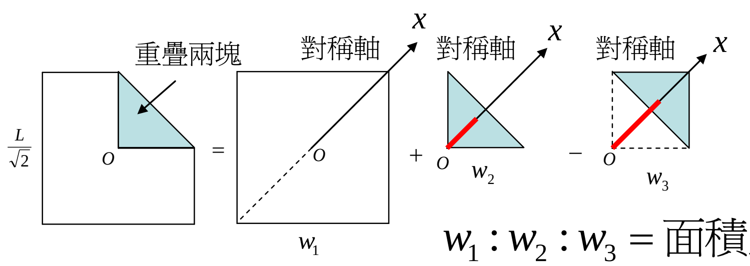
[解析]：



$$w_1 : w_2 : w_3 = \text{面積比} = 8:1:1$$

正方形邊長為 $\dfrac{L}{\sqrt{2}}$，以 O 為參考原點

因 w_1 及 w_2 的重心座標求得過程較煩，本圖形可利用相對於對稱軸為一對稱關係而求得。



$$w_1 : w_2 : w_3 = \text{面積比} = 8:1:1$$

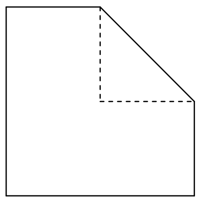
$$\vec{r}_G = \frac{w_1(0,0) + w_2(\frac{L}{4}\times\frac{2}{3},0) - w_3(\frac{L}{4}+\frac{L}{4}\times\frac{1}{3},0)}{w_1 + w_2 - w_3}$$

$$= \frac{8(0,0) + 1(\frac{L}{4}\times\frac{2}{3},0) - 1(\frac{L}{4}+\frac{L}{4}\times\frac{1}{3},0)}{8+1-1} = (-\frac{L}{48},0)$$

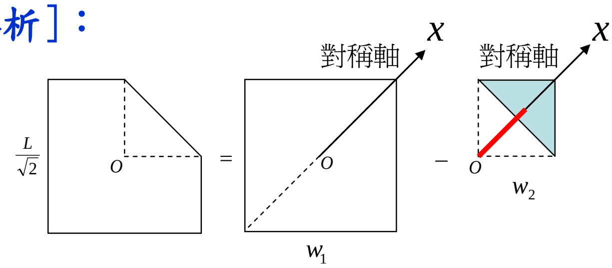
$$|\vec{r}_G| = \frac{L}{48}$$

例題：

設正方形均勻紙片之對角線長為 L，如圖將其中一角撕掉如圖所示，則剩餘紙片的重心至正方形中心的距離為何？



[解析]：



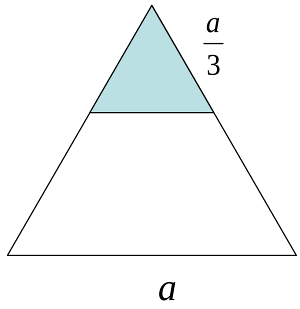
$$w_1 : w_2 = \text{面積比} = 8:1$$

$$\vec{r}_G = \frac{w_1(0,0) - w_2(\frac{L}{4}+\frac{L}{4}\times\frac{1}{3},0)}{w_1 - w_2} = \frac{8(0,0) - 1(\frac{L}{4}+\frac{L}{4}\times\frac{1}{3},0)}{8-1} = (-\frac{L}{21},0)$$

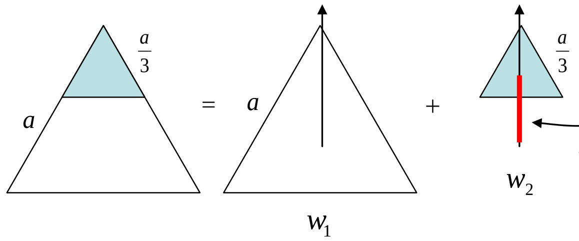
$$|\vec{r}_G| = \frac{L}{21}$$

例題：

一均勻正三角形邊長為 a，放上一同質料邊長為 a/3 之正三角形於一頂點，如圖所示。若不計厚度，則重心移動若干？



[解析]：



$$\frac{\sqrt{3}}{2}a\times\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{a}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{9}a$$

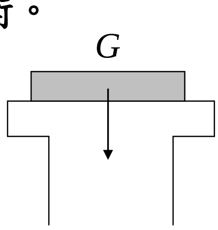
$$w_1 : w_2 = \text{面積比} = 9:1$$

$$\vec{r}_G=\frac{w_1(0,0)+w_2(0,\frac{2\sqrt{3}}{9}a)}{w_1+w_2}=\frac{9(0,0)+1(0,\frac{2\sqrt{3}}{9}a)}{9+1}=(0,\frac{\sqrt{3}}{45}a)$$

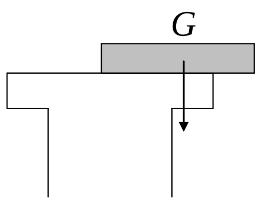
$$|\vec{r}_G|=\frac{\sqrt{3}}{45}a$$

重心與平衡：

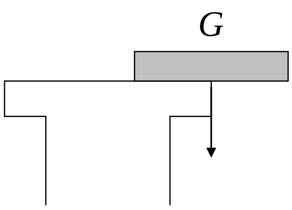
通過物體重心位置的鉛直線若落在底面的範圍內，該物體才能平衡。



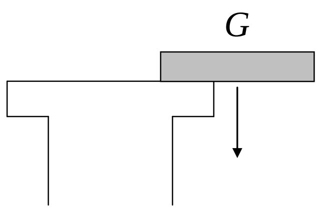
物體靜止於桌面



物體靜止於桌面



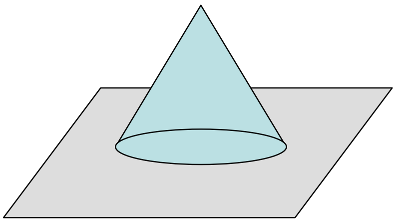
物體平衡時的最大限度



物體無法平衡

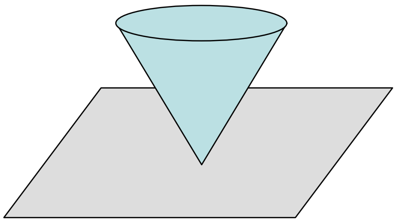
平衡的種類：

(1)穩定平衡：物體稍微離開原來位置，重心高度升高，物體會再回到原處。不倒翁為穩定平衡的例子。



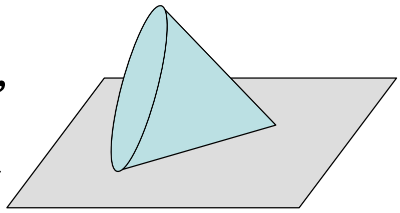
穩定平衡

(2)不穩定平衡：物體稍微離開原來位置，重心高度降低，物體不再回到原處。



不穩定平衡

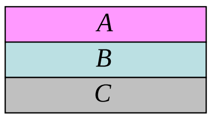
(3)隨遇平衡：物體稍微離開原來位置，重心高度不變，在新位置仍為平衡狀態，物體不會再回原處。



隨遇平衡

例題：(每塊外伸長度不同時)

長為 L 的磚三塊，每塊磚伸出其下磚塊之外圍。若此系統平衡，證明

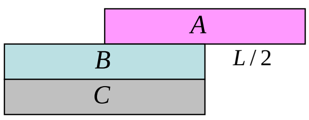


(1)最上方磚塊伸出其第二塊磚塊最大伸出量為 L/2

(2)最上面第二塊磚塊伸出其下方磚塊最大伸出量為 L/4

[解析]：

(1) 通過物體重心位置的鉛直線若落在底面的範圍內，該物體才能平衡。

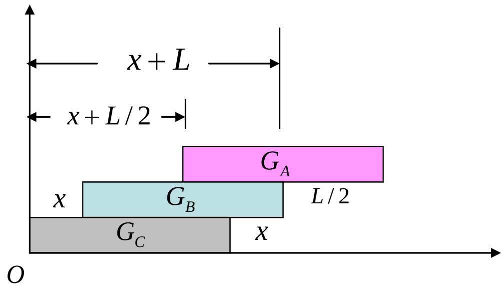


(2) 通過物體重心位置的鉛直線若落在底面的範圍內，該物體才能平衡。因此需先求出 A、B 兩磚塊的共同重心。以 O 為參考原點，O 到 A 的重心距離為 $x+L$，O 到 B 的重心距離為 $x+L/2$

$$\vec{r}_{G,x方向}=\frac{w_A(x+L)+w_B(x+\frac{L}{2})}{w_A+w_B}=\frac{w(x+L)+w(x+\frac{L}{2})}{w+w}=x+\frac{3}{4}L$$

$$\vec{r}_{G,x方向}=x+\frac{3}{4}L\le L$$

$$x\le\frac{1}{4}L$$



[註]：若方塊越多，其最大伸長量分別為 $\frac{L}{2}$、$\frac{L}{4}$、$\frac{L}{6}$、$\frac{L}{8}$、……

例題：

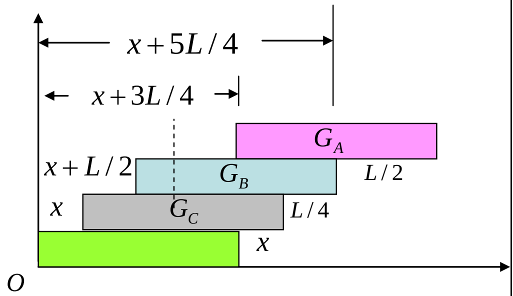
長為 L 的磚四塊，每塊磚伸出其下磚塊之外圍。若此系統平衡，則其最大伸出量為若干？

[解析]：

$$\vec{r}_{G,x方向}=\frac{w_A(x+\frac{5L}{4})+w_B(x+\frac{3L}{4})+w_C(x+\frac{L}{2})}{w_A+w_B+w_C}=x+\frac{5}{6}L$$

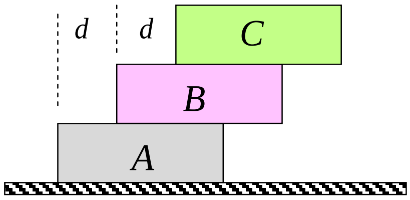
$$\vec{r}_{G,x方向}=x+\frac{5}{6}L\le L$$

$$x\le\frac{1}{6}L$$



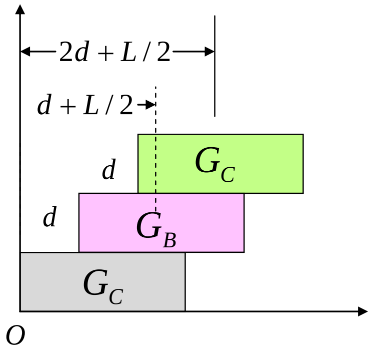
最大伸出量：$\frac{1}{6}L+\frac{1}{4}L+\frac{1}{2}L=\frac{11}{12}L$

例題：(每塊外伸長度相同時)



如圖，A、B、C 三木塊長度均為 L，質量相同。欲保持平衡，則 d 最大值為何？

[解析]：



對 C 木塊而言，$d \le \dfrac{L}{2}$

對 B、C 木塊而言

$$\vec{r}_{G,x\text{方向}} = \frac{w_B(d+\frac{L}{2})+w_C(2d+\frac{L}{2})}{w_B+w_C} = \frac{3d}{2}+\frac{L}{2}$$

$$\vec{r}_{G,x\text{方向}} = \frac{3d}{2}+\frac{L}{2} \le L \quad \Rightarrow \quad d \le \frac{L}{3}$$

若有 n 個長度為 L 的木塊，則 d 的最大值為 L/n

例題：

密度均勻的積木數塊，其長 19 cm，寬 4 cm，高 4 cm，堆高木塊，每層左緣均相距 3 cm。則最多可疊成多少層？

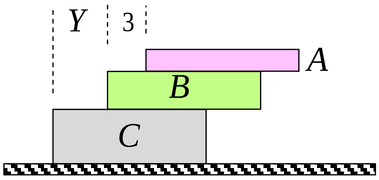
[解析]：

$$3 \le \frac{19}{n} \quad \Rightarrow \quad n \le \frac{19}{3}$$

取 $n = 6$ 為最多層

例題： P

A、B、C 均為長度 10 cm 的磚塊，質量比為 1:2:3。若 A 與 B 間錯開的距離為 3 cm，如圖所示。使磚塊不致傾倒，則 B 與 C 間錯開的距離 Y 最大為多少公分？

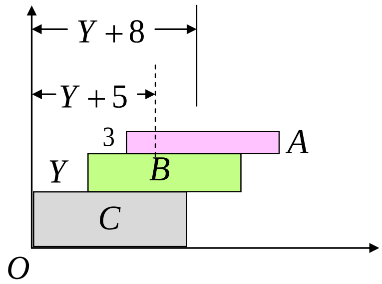


[解析]：

$$\vec{r}_{G,x方向}=\frac{w_A(Y+8)+w_B(Y+5)}{w_A+w_B}=\frac{1(Y+8)+2(Y+5)}{1+2}=Y+6$$

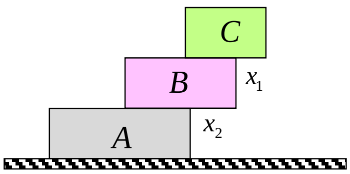
$$\vec{r}_{G,x方向}=Y+6\le 10$$

$$Y\le 4$$



例題：

密度相同的木塊 A、B、C，長度分別為 10 cm、8 cm、6 cm。圖中 $x_1=2\,cm$，木塊截面積皆相同，靜置如圖所示。則 x_2 的最大值為多少公分？

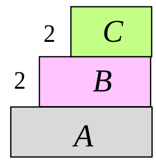


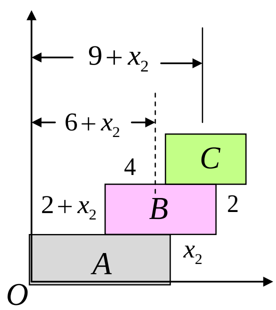
[解析]：

$$w_A:w_B:w_C=體積比=5:4:3$$

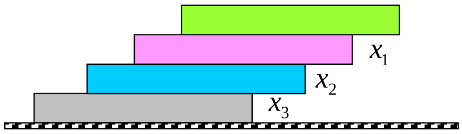
$$\vec{r}_{G,x方向}=\frac{w_B(6+x_2)+w_C(9+x_2)}{w_B+w_C}=\frac{51}{7}+x_2$$

$$\vec{r}_{G,x方向}=\frac{51}{7}+x_2\le 5 \qquad x_2\le\frac{19}{7}$$





例題：



有四個完全相同磚塊，每一磚塊長度 30 cm，堆積成如圖所示，而系統仍能平衡。

(1)若 $x_1 = x_2 = x_3$，則 $x_1 + x_2 + x_3$最大值為何？

(2)若 $x_1 : x_2 : x_3 = 3:2:1$ ，則 $x_1 + x_2 + x_3$ 最大值為何？

(3)若每一塊儘量伸出，，則 $x_1 + x_2 + x_3$ 最大值為何？

［解析］：

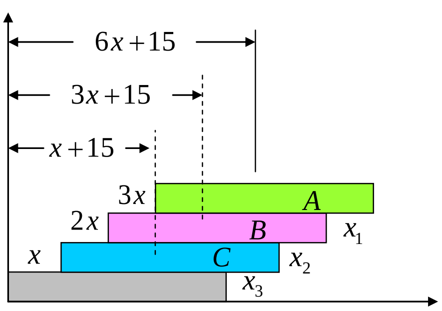
(1) $x_1 = x_2 = x_3 = \dfrac{L}{n} = \dfrac{30}{4} = \dfrac{15}{2}$ $\qquad x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{45}{2}$

(3) $x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{L}{2} + \dfrac{L}{4} + \dfrac{L}{6} = \dfrac{11}{12} L = \dfrac{55}{2}$

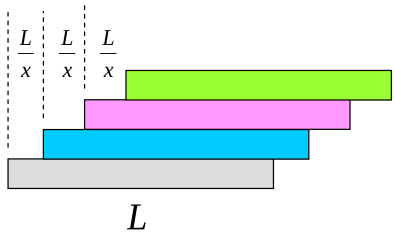
(2) $$\vec{r}_{G,x\text{方向}} = \frac{w_A(6x+15) + w_B(3x+15) + w_C(x+15)}{w_A + w_B + w_C} = \frac{10}{3}x + 15$$

$$\vec{r}_{G,x\text{方向}} = \frac{10}{3}x + 15 \leq 30 \qquad x \leq \frac{9}{2}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6x = \frac{54}{2} = 27$$



例題：



完全相同而長 L 的均勻木板如圖重疊，每次皆向右伸長 L/x。試問最多全部可疊成幾塊而不翻倒？但 x 為正數。

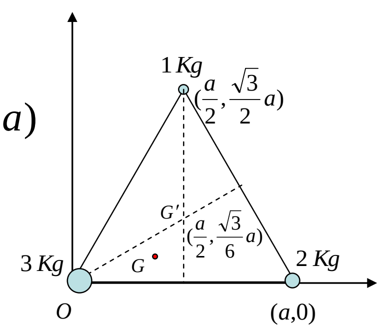
[解析]：

$$\frac{L}{x} \le \frac{L}{n} \quad \Rightarrow \quad n \le x$$

例題：

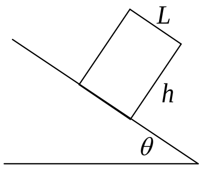
質量分別為 1 Kg、2 Kg、3 Kg 之三質點排列成邊長為 a 的正三角形，此系統之重心與三角形三中線交點的距離為多少？

[解析]：



$$\vec{r}_G = \frac{1(\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}a)+2(a,0)+3(0,0)}{1+2+3} = (\frac{5}{12}a,\frac{\sqrt{3}}{12}a)$$

$$\overline{GG'} = \sqrt{(\frac{5}{12}a-\frac{1}{2}a)^2+(\frac{\sqrt{3}}{12}a-\frac{\sqrt{3}}{6}a)^2} = \frac{a}{6}$$



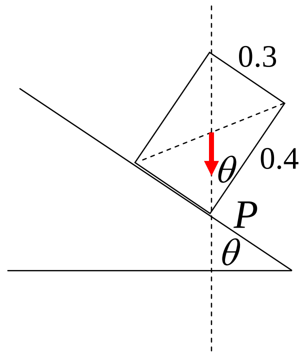
例題：

高 $h=0.4\,m$，寬 $L=0.3\,m$的長方體均勻木箱立於斜面上，當斜面逐漸增大到何角度後木箱會傾倒？

[解析]：

通過物體重心位置的鉛直線若落在底面的範圍內，該物體才能平衡。因此木箱傾倒時，通過物體重心的鉛直線恰通過 P 點。

$$\tan\theta=\frac{3}{4} \quad\Rightarrow\quad \theta=37^0$$



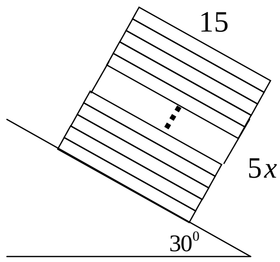
例題：

厚 5 厘米、長 15 厘米之磚，重疊於 30^0 之斜面上(並不滑動），問最多可疊幾塊？

[解析]：

$$\tan 30^0 \le \frac{15}{5x} \quad\Rightarrow\quad x\le 3\sqrt{3}\approx 5.1$$

取 5 塊

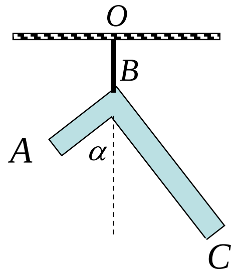


例題：

厚度 a、長度 3a 的磚塊，重疊於 30^0 的斜坡上而不滑動。請問最多可以疊幾塊？

[解析]： $\tan 30^0 \le \dfrac{3a}{ax} \quad\Rightarrow\quad x\le 3\sqrt{3}\approx 5.1$ 取 5 塊

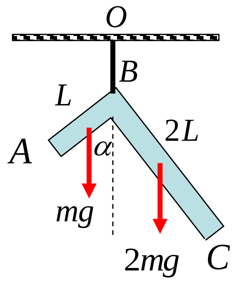
例題：



一均勻直角矩被懸掛於 B 點，$\overline{BC}=2\overline{AB}$，當平衡時 $\overline{AB}$ 與鉛直線方向成 α 角，求 $\tan\alpha=?$

[解析]：

直角矩平衡時，重心恰在 $\overline{OB}$ 的延伸線上，直角矩分成 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BC}$ 兩段。以 B 為參考支點，合力矩為零。

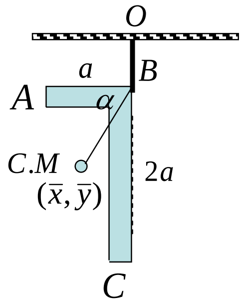


$$\sum M_B=0 \quad\Rightarrow\quad mg(\frac{L}{2}\sin\alpha)-2mg(L\cos\alpha)=0$$

$$\tan\alpha=4$$

[另解]：

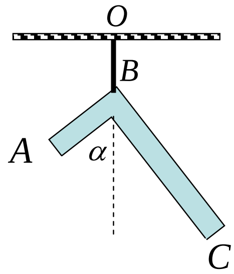
圖(b)為偏離後的圖形，鉛垂線必過質心(C.M.)。可反推圖(a)，求出質心座標即可。以 B 點為座標原點(0,0)



(a)圖

$$(\bar{x},\bar{y})=\frac{1(-\frac{a}{2},0)+2(0,-a)}{1+2}=(-\frac{1}{6}a,-\frac{2}{3}a)$$

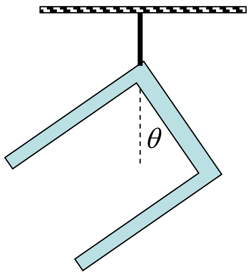
$$\tan\alpha=\frac{|\bar{y}|}{|\bar{x}|}=4$$



(b)圖

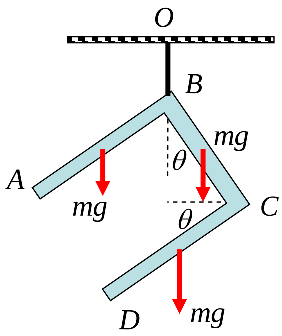
例題：

把一粗細均勻的鐵絲彎成三邊等長之 U 形，將一底端用繩吊起如圖，則平衡時傾斜角 θ 之 $\tan\theta = ?$



[解析]：

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{mg(\frac{L}{2}\cos\theta)}_{AB\text{段力矩}} - \underbrace{mg(\frac{L}{2}\sin\theta)}_{BC\text{段力矩}} + \underbrace{mg(\frac{L}{2}\cos\theta - L\sin\theta)}_{CD\text{段力矩}} = 0$$

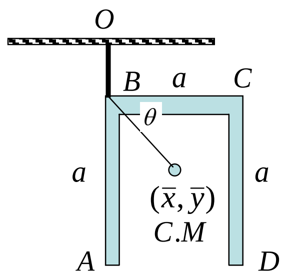


$$\cos\theta = \frac{3}{2}\sin\theta$$

$$\tan\theta = \frac{2}{3}$$

[另解]：

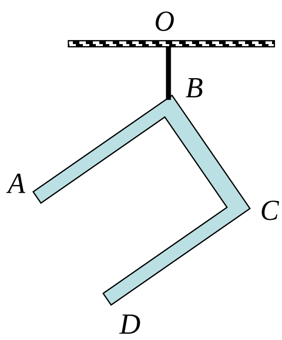
圖(b)為偏離後的圖形，鉛垂線必過質心(C.M.)。可反推圖(a)，求出質心座標即可。以 B 點為座標原點 (0,0)



(a)圖

$$(\bar{x},\bar{y}) = \frac{1(0,-\frac{a}{2}) + 1(\frac{a}{2},0) + 1(a,-\frac{a}{2})}{1+1+1} = (\frac{1}{2}a, -\frac{1}{3}a)$$

$$\tan\alpha = \frac{|\bar{y}|}{|\bar{x}|} = \frac{2}{3}$$



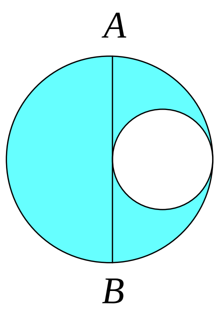
(b)圖

例題：

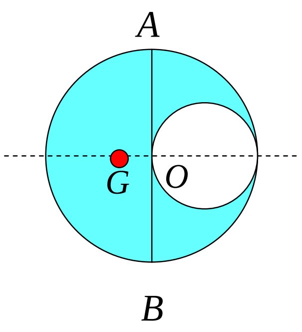
一均勻圓板半徑為 R，若挖去半徑為 R/2 的一個內切圓，如圖所示。求

(1)剩餘部份之重心距離圓重心多遠？

(2)若剩餘部份以細繩自 A 點吊起，平衡時 AB 直徑與鉛直線夾角為 θ，則 $\tan\theta = ?$



[解析]：



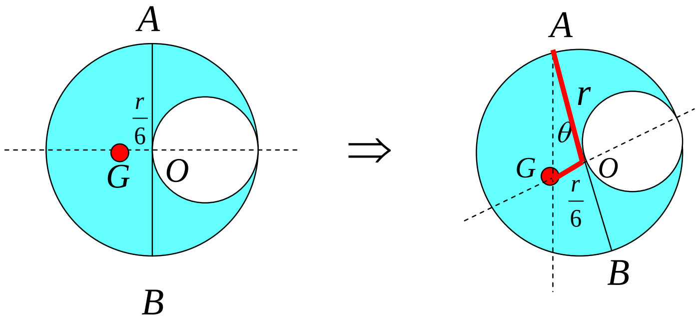
(1) 以 O 為參考原點

$$w_r : w_{r/2} = \text{面積比} = \pi r^2 : \pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 = 4:1$$

$$\vec{r}_G = \frac{w_r \times 0 - w_{r/2}\dfrac{r}{2}}{w_r - w_{r/2}} = \frac{4\times 0 - 1\times\dfrac{r}{2}}{4-1} = -\frac{r}{6}$$

$$|\vec{r}_G| = \frac{r}{6}$$

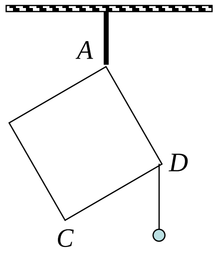
(2)



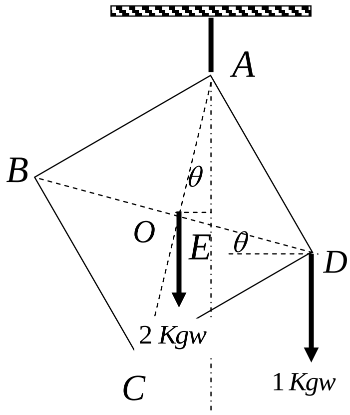
$$\tan\theta = \frac{\overline{OG}}{\overline{OA}} = \frac{\frac{r}{6}}{r} = \frac{1}{6}$$

例題：

如圖所示，先以細繩懸掛質量為 2 公斤之均匀正方形木板 ABCD，懸掛點為 A。若再於木板的 D 點繫 一顆 1 公斤之球，請問木板偏移角之正切值為何？



[解析]：



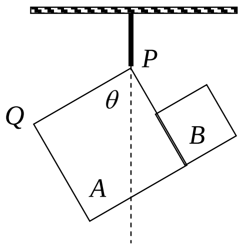
$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{2(\overline{OE}\cos\theta)}_{2\,Kgw\text{力矩}} - \underbrace{1(\overline{DE}\cos\theta)}_{1\,Kgw\text{段力矩}} = 0$$

$$\frac{\overline{OE}}{\overline{DE}} = \frac{1}{2} \qquad \overline{AO} = \overline{OD} = \overline{OE} + \overline{DE} = 3\overline{OE}$$

$$\tan\theta = \frac{\overline{OE}}{\overline{AO}} = \frac{1}{3}$$

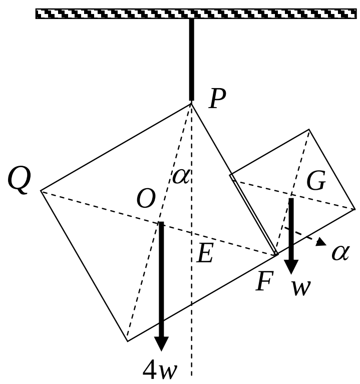
例題：

如圖所示，兩質料、厚度均勻且相同的正方形薄板 A、B，邊長比為 2:1。今以強力黏著劑將 B 之一邊黏於 A 上後以一輕繩(質量可忽略不計)自 P 點懸吊之。則 PQ 邊將偏離鉛垂線 θ，則 $\tan\theta = ?$



[解析]： $\theta = 45^0 + \alpha$

設 $m_B = w$，則 $m_A = 4w$



$$\sum M_P = 0$$

$$\underbrace{4w(\overline{OE}\cos\alpha)}_{4w\text{力矩}} - \underbrace{w(\overline{EF}\cos\alpha + \overline{FG}\sin\alpha)}_{w\text{力矩}} = 0$$

$$4\overline{OE} - \overline{EF} = \overline{FG}\tan\alpha$$

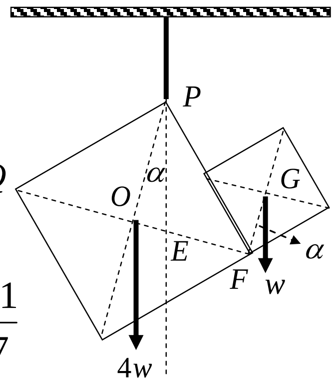
$$\because \begin{cases} 4\overline{OE}-\overline{EF}=\overline{FG}\tan\alpha \\ \overline{OE}+\overline{EF}=\overline{OF}=2\overline{FG} \end{cases} \Rightarrow \overline{OE}=\frac{\overline{FG}}{5}\tan\alpha+\frac{2}{5}\overline{FG}$$

$$\because \tan\alpha=\frac{\overline{OE}}{\overline{OP}}=\frac{\frac{\overline{FG}}{5}\tan\alpha+\frac{2}{5}\overline{FG}}{2\overline{FG}}=\frac{\frac{1}{5}\tan\alpha+\frac{2}{5}}{2}$$

$$2\tan\alpha=\frac{1}{5}\tan\alpha+\frac{2}{5} \Rightarrow \tan\alpha=\frac{2}{9}$$

又 $\theta=45^0+\alpha$

$$\tan\theta=\tan(45^0+\alpha)=\frac{\tan 45^0+\tan\alpha}{1-\tan 45^0\tan\alpha}=\frac{1+\frac{2}{9}}{1-\frac{2}{9}}=\frac{11}{7}$$



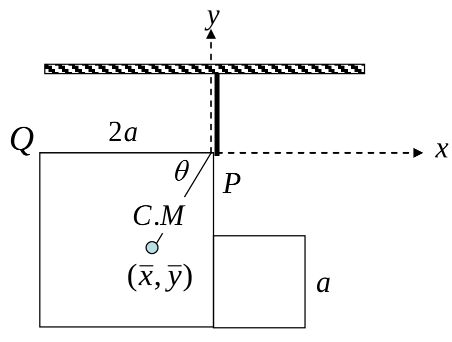
［另解］：

圖(b)為偏離後的圖形，鉛垂線必過質心(C.M.)。可反推圖(a)，求出質心座標即可。

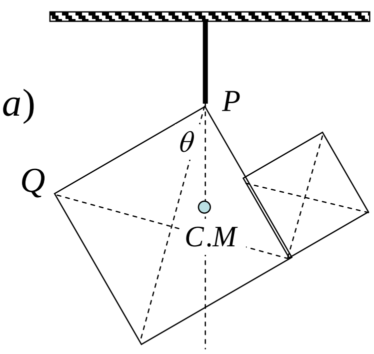
以 P 點為座標原點（0,0）

$$(\bar{x},\bar{y})=\frac{4(-a,-a)+1(\frac{a}{2},-\frac{3}{2}a)}{4+1}=(-\frac{7}{10}a,-\frac{11}{10}a)$$

$$\tan\theta=\frac{|\bar{y}|}{|\bar{x}|}=\frac{11}{7}$$



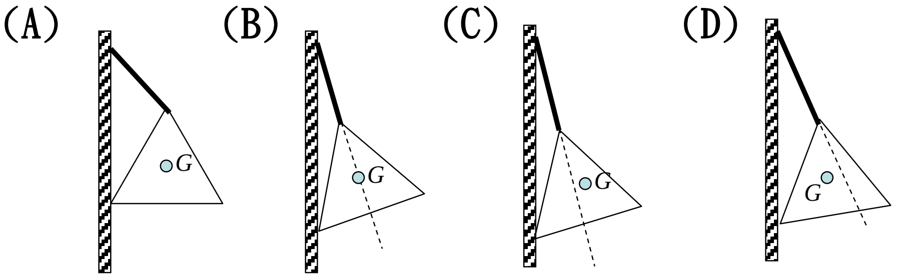
(a)圖



(b)圖

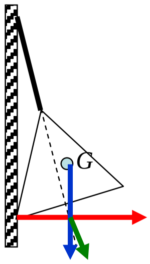
例題：

下列四圖表示一個正三角形均質木板懸於牆上的情形，G點為木板之重心。設牆為光滑者，故牆對木板之推力與牆垂直。問下列哪一情形最接近平衡狀態？

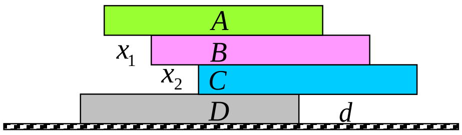


[解析]：

(C)需三力共點

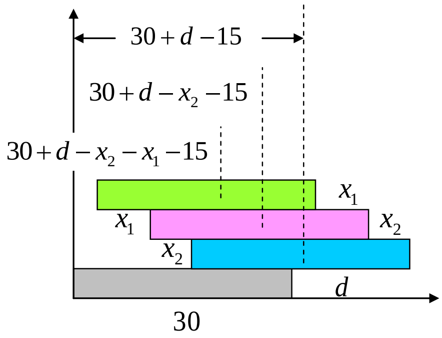


例題：



如圖所示，A、B、C、D 四塊完全相同的木塊，長度均為 30 公分，在保持平衡的條件下，調整 A、B 的位置使 C 向右伸出量最大，則 C 塊向右伸出之最大長度 d 為多少？

[解析]：



欲使 d 最大，A、B 需往左伸出極大

$$x_1=\frac{30}{2}=15 \qquad x_2=\frac{30}{4}=7.5$$

$$\vec{r}_{G,x方向}=\frac{w_A(30+d-x_2-x_1-15)+w_B(30+d-x_2-15)+w_C(30+d-15)}{w_A+w_B+w_C}=d+5$$

$$\vec{r}_{G,x方向}=d+5\le 30 \quad\Rightarrow\quad d\le 25$$

例題：

下列有關重心與質心的敘述何者正確？

(A)每個人的重心位置必固定於體內某一點

(B)重心與質心必位於同一點

(C)半徑為 R 之均勻圓球，挖去一直徑為 R 之內切圓後，重心移動了 R/14。

(D)兩質點組成之系統，其重心位置必於兩物之連線上

(E)若兩質點之質量分別為 m_1 、 m_2，則質心與兩質點之距離比為 r_1、 r_2 。

［解析］：

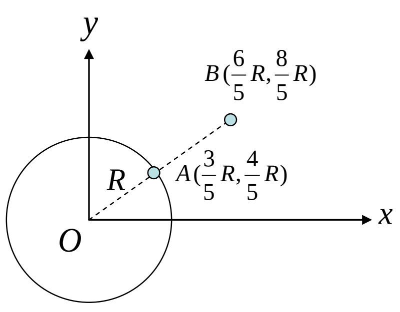
(C)(D)(E)

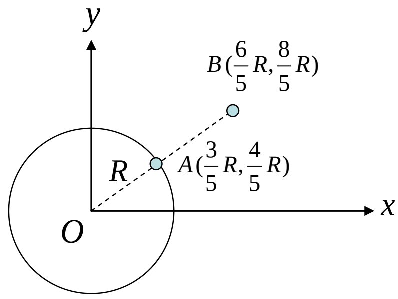
例題：

設地球為正球形，半徑為 R。今已球心 O 為原點，建立正交座標系，如圖所示。有 A、B 兩質點，質量及位置分別為 A：2 公斤(3R/5, 4R/5) ，B：4 公斤(6R/5, 8R/5) ，而 A 處之重力場強度 g_A 為 B 處重力場強度 g_B 之 4 倍，則

(1) A、B 質點所構成的系統質心位置之座標？（以 R 表示）

(2)此質點系統之重心位置距地球球心多遠？（以 R 表示）





[解析]：

(1)質心

$$\vec{r}_{C.M.}=\frac{2(\frac{3}{5}R,\frac{4}{5}R)+4(\frac{6}{5}R,\frac{8}{5}R)}{2+4}=(R,\frac{4}{3}R)$$

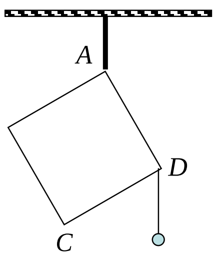
(2)重心

$$w_A=m_Ag_A \qquad w_B=m_Bg_B \qquad w_A:w_A=2\times4:4\times1=2:1$$

$$\vec{r}_G=\frac{2(\frac{3}{5}R,\frac{4}{5}R)+1(\frac{6}{5}R,\frac{8}{5}R)}{2+1}=(\frac{4}{5}R,\frac{16}{15}R)$$

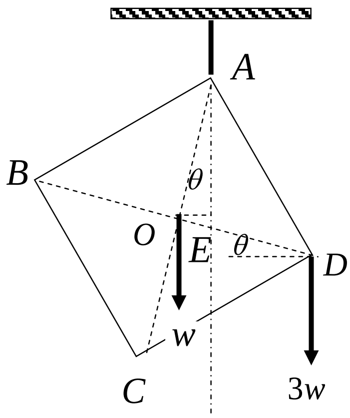
$$|\vec{r}_G|=\frac{4}{3}R$$

例題：



有一正方形薄板 ABCD 重量 W，將 A 點以活動軸固定，使薄板可以自由無摩擦的轉動。若在 D 點懸掛重 3W 的物體，平衡後薄板所轉動的角度為 θ，則 $\tan\theta=?$

[解析]：

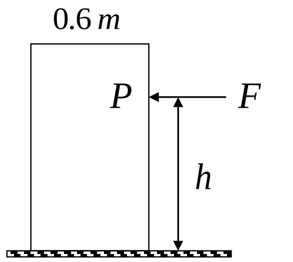


$$\sum M_A=0 \quad\Rightarrow\quad \underbrace{w(\overline{OE}\cos\theta)}_{w力矩}-\underbrace{3w(\overline{DE}\cos\theta)}_{3w段力矩}=0$$

$$\frac{\overline{OE}}{\overline{DE}}=\frac{3}{1} \qquad \overline{AO}=\overline{OD}=\overline{OE}+\overline{DE}=\frac{4}{3}\overline{OE}$$

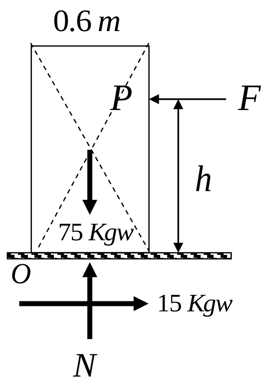
$$\tan\theta=\frac{\overline{OE}}{\overline{AO}}=\frac{3}{4}$$

例題：



水平面上有一只重量為 75 公斤重的木箱，已知木箱與地面間的最大靜摩擦力為 15 公斤重。今施一水平力推此木箱，如圖所示，木箱恰要同時發生移動與翻倒現象，則 P 點離地面的高度 h 為多少？

[解析]：



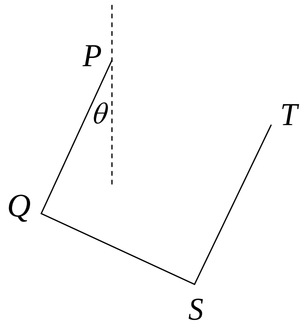
$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -F + 15\times 9.8 = 0 \quad \Rightarrow \quad F = 147$$

$$\sum M_O = 0 \quad \Rightarrow \quad (N - 75\times 9.8)\times\frac{0.6}{2} + F\times h = 0$$

木箱恰要同時發生移動與翻倒現象： $N \geq 0$

$$h = 1.5\,(m)$$

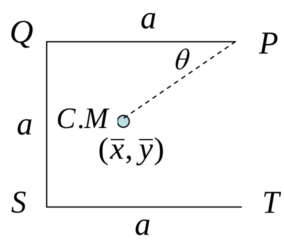
例題：



(b) 圖

如圖所示，以一輕繩將一 U 字型的均勻鋼絲 PQST 懸起。已知 PQ、QS、ST 三段等長，則當平衡時，PQ 與鉛直方向所夾角度為 θ，則 $\tan\theta = ?$

[解析]：



(a) 圖

圖(b)為偏離後的圖形，鉛垂線必過質心(C.M.)。可反推圖(a)，求出質心座標即可。

以 P 點為座標原點 (0,0)

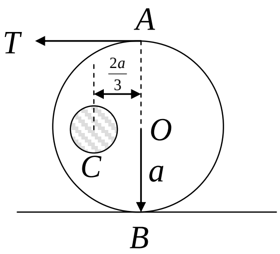
$$(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1(-\frac{a}{2},0) + 1(-a,-\frac{a}{2}) + 1(-\frac{a}{2},-a)}{1+1+1} = (-\frac{2}{3}a, -\frac{1}{2}a) \qquad \tan\theta = \frac{|\bar{y}|}{|\bar{x}|} = \frac{3}{4}$$

例題：

圖中為重量 80 N，半徑 a 的某均勻圓柱體橫截面。今在圓柱體內挖去重量 15 N 的圓柱體(如圖所示），此中空圓柱體的中心軸 C 與原圓柱體的中心軸 O 互相平行，而距離為 2a/3，則

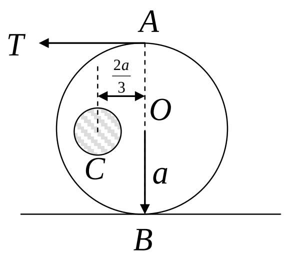
(1)挖去斜線部分後，重心右移多少距離？

(2)為避免圓柱體發生滾動，以一水平輕繩繫於 A 點，則 繩子拉力 T 應為多少，圓柱才不動？



[解析]：

[解析]：



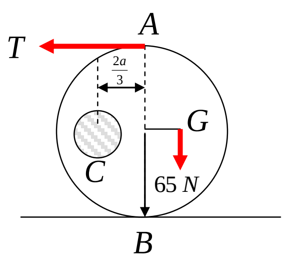
以 O 為參考原點

(1) $$\vec{r}_G=\frac{80\times 0-15(-\frac{2a}{3})}{80-15}=\frac{10a}{65}=\frac{2a}{13}$$

(2) $$\sum \vec{M}_B=0$$

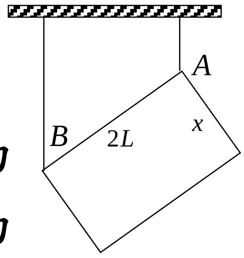
$$T\times 2a-65\times\frac{2a}{13}=0$$

$$T=5\,(N)$$



例題：

有一均勻密度矩形薄木板，厚度各處相同，長度為 x，寬度為 2L，重量為 W，以兩繩 A 及 B 垂直懸掛在天花板上，如圖所示。兩繩 A 及 B 的長度分別為 L 及 2L，則當木板處於靜止狀態時，下列敘述何者正確？



(A)當 $x = L$ 時，則 A 繩的張力較 B 繩的張力大

(B)不論 x 值為何，A 繩的張力恆等於 B 繩的張力

(C)不論 x 值為何，A 繩的張力恆大於 B 繩的張力

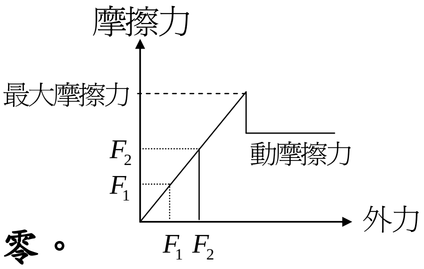
(D)當 $x = 2\sqrt{3}L$ 時， B 繩的張力為零

(E)不論 x 值為何，A 繩的張力與 B 繩的張力對木板中心的力矩，量值恆相等

[解析]： **(A)(C)(D)(E)**

第 3-7 節 摩擦力

兩物體互相接觸，若兩者間有相對運動的趨勢時，接觸面間即存在靜摩擦力。

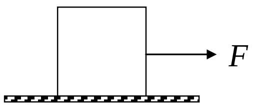


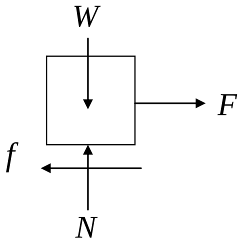
靜摩擦擦力：

置一物體於粗糙的平面上

1. 不施任何力於物體上，靜摩擦力等於零。
2. 水平施力 $\vec{F_1}$ 於物體，若物體不移動，則，靜摩擦力等於 $\vec{F_1}$
3. 若外力逐漸增大至 $\vec{F_2}$，而物體仍不移動，靜摩擦力也隨著增加至 $\vec{F_2}$
4. 若外力增大到某值，物體恰開始移動，此時摩擦力為最大，稱為最大靜摩擦力。

最大靜摩擦力公式



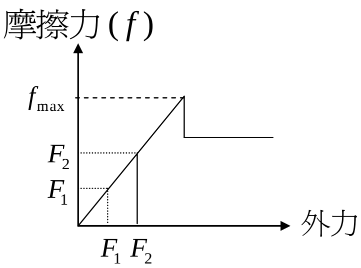


$$f_{\max} = \mu_s N$$

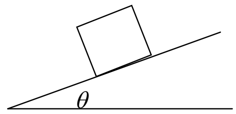
μ_s：靜摩擦係數

N：正向力

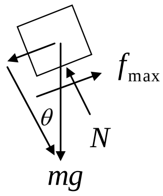
一般靜摩擦力 $\leq \mu_s N$



靜摩擦係數的測定



物體置於斜面上，緩慢增加傾斜角 θ。當物體開始下滑時的 θ 角度



$$\begin{cases} mg\cos\theta = N \\ mg\sin\theta = \mu_s N \end{cases} \Rightarrow \quad \mu_s = \tan\theta$$

$$0 < \mu = \tan\theta < \infty$$

動靜摩擦力公式

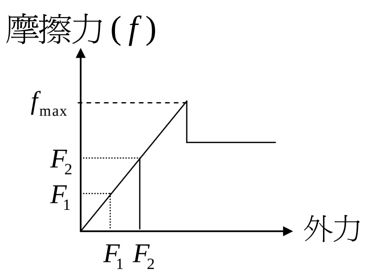
當物體滑動時，物體在接觸面上受大小固定的摩擦力作用，稱為摩擦力。動摩擦力小於最大靜摩擦力。

$$f_k = \mu_k N$$

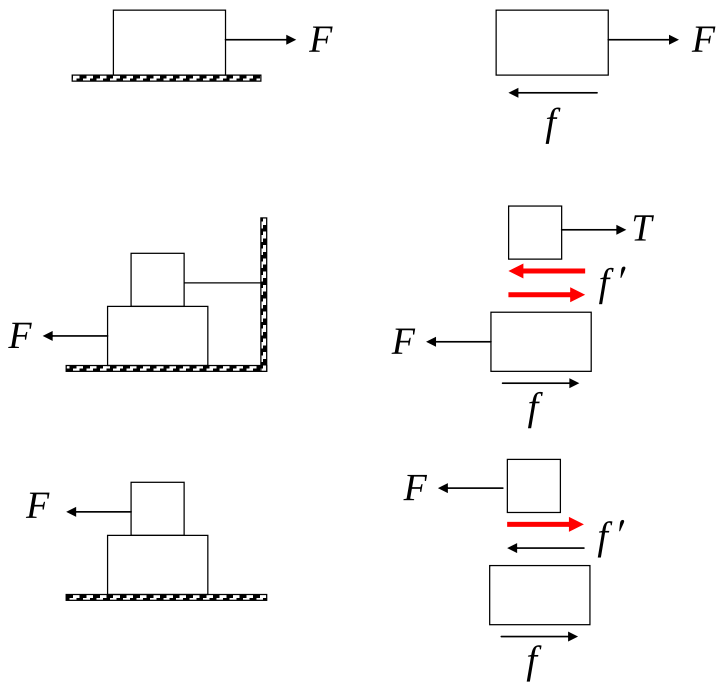
μ_k：動摩擦係數

N：正向力

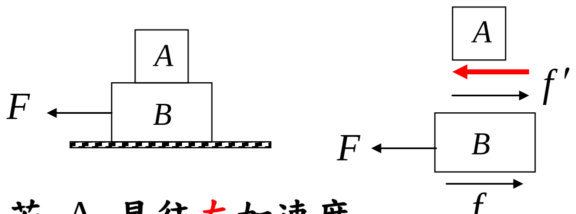
$$\mu_k < \mu_s$$



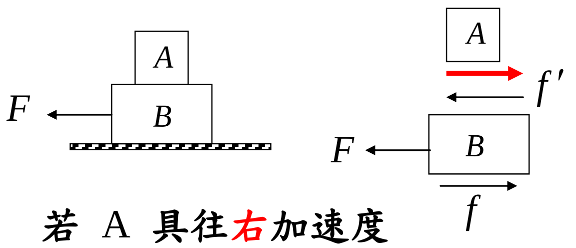
摩擦力方向



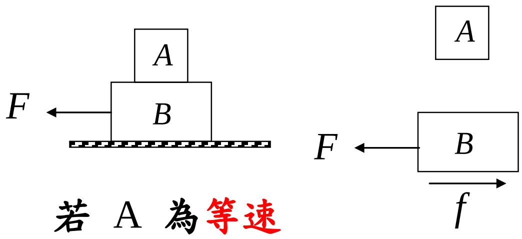
摩擦力方向與物體運動方向相反



若 A 具往**左**加速度



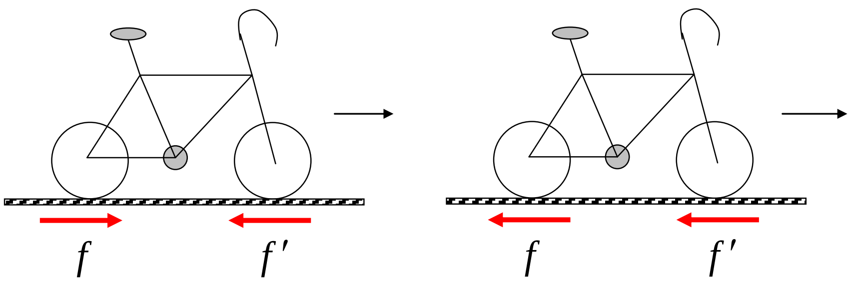
若 A 具往**右**加速度



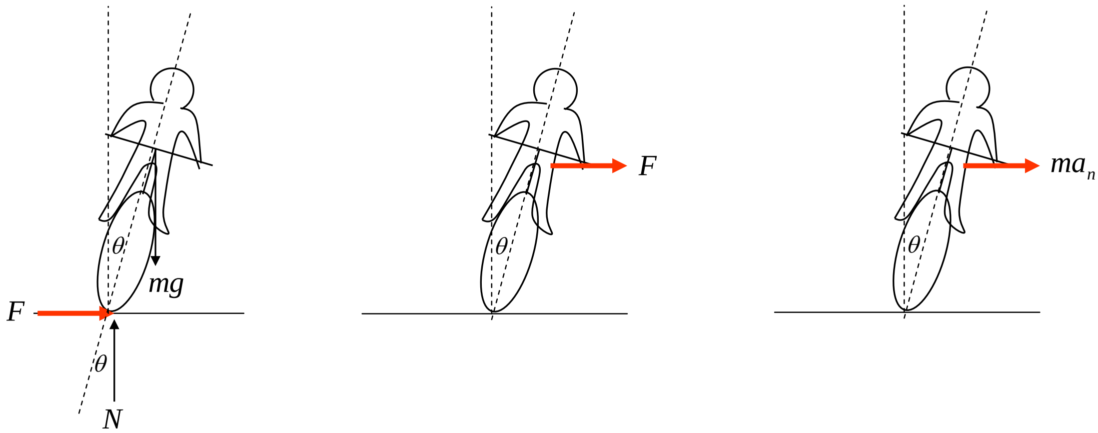
若 A 為**等速**

腳踏車為

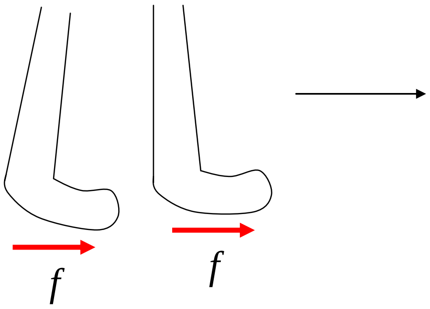
後輪傳動



加速前進　　減速前進



摩擦力方向與物體運動方向垂直，作為圓周運動的向心力。



摩擦力方向與物體運動方向同向

例題：

有關摩擦力的敘述何者錯誤？

(A)摩擦力隨外界作用力而改變

(B)物體所受摩擦力不因速度大小而變

(C)摩擦係數與正向力成正比

(D)摩擦係數必定大於 1

(E)運動體的摩擦力方向必與運動方向相反

[解析]：

(C)(D)(E)　(D)：$0<\mu=\tan\theta<\infty$

(E)人走路、汽車前進，摩擦力與運動方向相同。在斜面上圓周運動前進的車子，當車速超過安全速度時，會往外滑動，摩擦力與運動方向垂直。

例題：

下列敘述何者錯誤？

(A)靜止於斜面上的物體，不受摩擦力作用

(B)摩擦力和接觸面積成正比

(C)車輛之起動與停止均需靠摩擦力作用

(D)物體所受靜摩擦力和正向力之比值即為靜摩擦係數

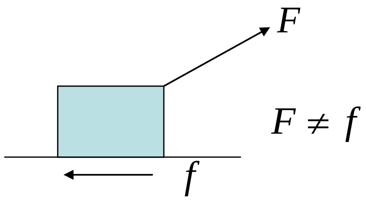
(E)靜摩擦力恒等於物體所受之外力值

[解析]：

(A)(B)(D)(E)

(D)最大靜摩擦力和正向力之比值才為靜摩擦係數

(E)



例題：

下列何者正確？

(A)物體需具運動狀態方有摩擦力存在

(B)將質量 m 之物體靜置於靜摩擦係數 μ_s 之桌上，其淨摩擦力為 $\mu_s mg$

(C)摩擦力與運動方向相反

(D)動摩擦力會隨物體之運動速率而改變

(E)摩擦力與接觸面積的大小無關

[解析]：

(E)

例題：

腳踏車是最簡單的交通工具之一，騎乘腳踏車更是有益健康。腳踏車在使用一段時日之後，輪胎的胎壓都會逐漸降低，不僅令乘者不適，也會加速輪胎磨損。假設腳踏車的輪胎不會漏氣，輪胎的體積也可維持不變，下列有關腳踏車的敘述何者正確？

(A)輪胎的摩擦力總是和胎壓成正比

(B)腳踏車負載越重，輪胎與地面的摩擦力越大

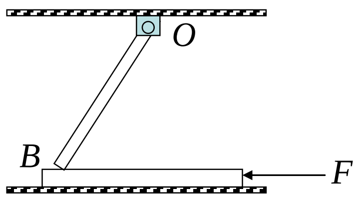
(C)在熱的柏油路面上騎一段時間後，胎壓會升高

(D)如果騎乘者的重量增為兩倍，則輪胎的胎壓會變為兩倍

[解析]：

(B)(C)

例題：



在光滑水平面上有一木板，一木棒可繞水平軸 O 轉動，其下端 B 放在木板上，而整個系統處於靜止狀態。現用水平力 F 向左推木板，但木板仍未動，由此可以推出結論：施力 F 後，木板和木棒之間的正向力將

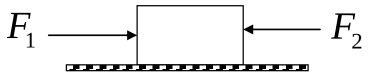
(A)變大　(B) 變小　(C)不變

(D)先變大後變小　(E)先變小後變大

[解析]：

(C)

例題：



如圖所示，重量 10 Kg 重的物體放在水平面上，同時受到水平向右的力 $F_1=8$ 公斤重和水平向左 $F_2=2$ 公斤重作用，物體處於平衡狀態。下列敘述何者正確？

(A)物體與水平面的靜摩擦係數至少 0.6

(B)撤去 F_1 後，物體所受的合力必定為 0 公斤重

(C)撤去 F_1 後，物體所受的摩擦力必定為 2 公斤重

(D)撤去 F_2 後，物體所受的合力必定為 0 公斤重

(E)撤去 F_2 後，物體所受的摩擦力必定為 8 公斤重

［解析］：

(A)(B)(C)

例題：

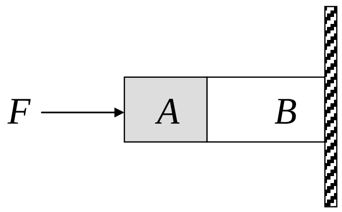
A、B 兩物質量分別為 2 Kg、3 Kg，施一力水平力 1 Kg 可使兩物靠在牆上不滑下，如圖所示，求

(1) B 與牆壁間靜摩擦力

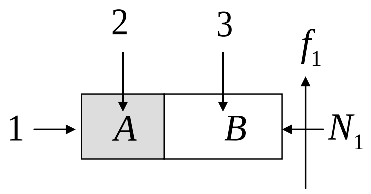
(2) B 與牆壁間的正向力

(3) A 所受的靜摩擦力

(4) A、B 間的正向力



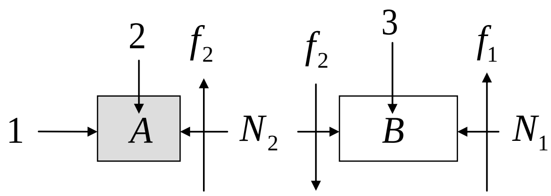
[解析]：



(1) B 物體

$\sum F_y = 0 \quad -2-3+f_1=0 \quad f_1 = 5\,(kgw)$

(2) $\sum F_x = 0 \quad 1-N_1=0 \quad N_1 = 1\,(kgw)$



(3) A 物體

$\sum F_y = 0 \quad f_2-2=0 \quad f_2 = 2\,(kgw)$

(4) $\sum F_x = 0 \quad N_2-1=0 \quad N_2 = 1\,(kgw)$

例題：

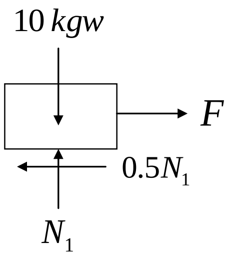
重 10 Kg 之鋼塊靜止於水平桌上，鋼塊與桌面間之靜摩擦係數為 0.5

(1)使鋼塊恰能起動，則水平力應多大？

(2)若力向上與水平成 60^0 時又如何？

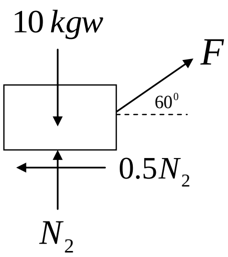
(3)若力向下與水平成 60^0 時又如何？

[解析]：



(1) $F = 0.5N_1 = 0.5(10) = 5\,(kgw)$

(2) **鋼塊恰能起動** $f = f_{\max} = \mu_s N$

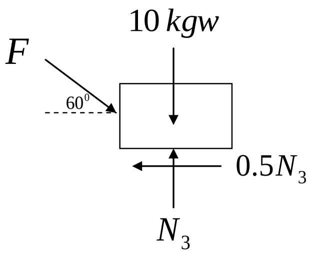


$$\sum F_x = 0 \qquad F\cos 60^0 - 0.5N_2 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad F\sin 60^0 - 10 + N_2 = 0$$

$$F = 20(2-\sqrt{3})\,(kgw)$$

(3)



$$\sum F_x = 0 \qquad F\cos 60^0 - 0.5N_3 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad -F\sin 60^0 - 10 + N_3 = 0$$

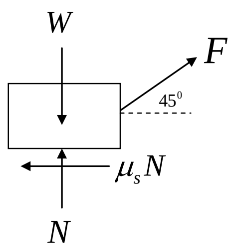
$$F = 20(2+\sqrt{3})\,(kgw)$$

例題：

有一箱重 W 置於水平地板上，箱與地面間的靜摩擦係數為 μ_s，今以與水平成 45^0 角的方向斜上方拉箱子，使箱子在地板上滑動，則所需的拉力至少需多少？

[解析]：

$$\sum F_y = 0 \qquad F\sin 45^0 - W + N = 0 \quad N = -F\sin 45^0 + W$$



欲使箱子在地板上滑動

$$\sum F_x \geq 0 \qquad F\cos 45^0 - \mu_s N \geq 0$$

$$F\cos 45^0 - \mu_s(-F\sin 45^0 + W) \geq 0$$

$$F \geq \frac{\sqrt{2}\mu_s}{1+\mu_s} W$$

例題：

如圖所示，質量 m 的物體靠於鉛直牆上與牆之間的靜摩擦係數為 μ_s，今施一水平力 F 於物體，使物體不滑下，則

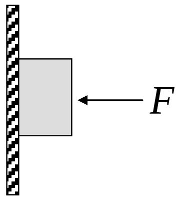
(A) $F = mg$

(B) $mg = \mu_s F$

(C)牆與物體間的摩擦力為 mg

(D)牆施於物體的合力為 $F\sqrt{1+\mu_s^2}$

(E)若物體與牆無摩擦，則 F 無論多大均不能平衡



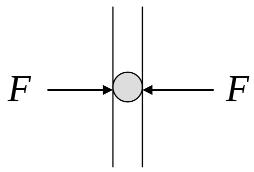
[解析]：

(C)(E) $mg \le \mu_s F$

若物體恰要下滑，則答案為 **(B)(C)(D)(E)**

例題：

如圖所示，用一雙筷子平行夾住鐵球，鐵球質量為 0.2 Kg，與筷子的摩擦係數為 μ。若將鐵球夾起並靜止在某處，則施力 F 至少多少牛頓？($g=10\ m/s^2$)

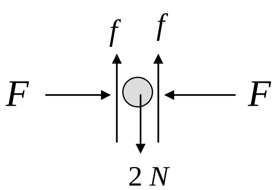


[解析]：

$$2 = f + f$$

$$f = 1(N) \le \mu F$$

$$F \ge \frac{1}{\mu}(N)$$

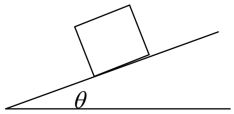


例題：

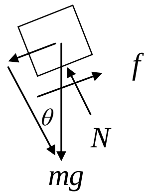
一物體與木板間靜摩擦係數為 3/4，動摩擦係數為 1/4。若將木板逐漸傾斜，其傾斜角為若干時，物體即將開始下滑？

［解析］：

$$\begin{cases} mg\cos\theta = N \\ mg\sin\theta = f \end{cases} \Rightarrow \quad f = N\tan\theta$$



物體即將開始下滑時， $f = f_{\max} = \mu_s N$

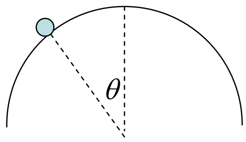


$$\mu_s N = N\tan\theta \qquad \mu_s = \tan\theta$$

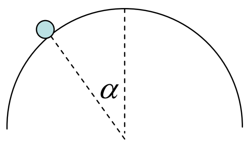
$$\frac{3}{4} = \tan\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = 37^0$$

例題：

如圖所示，彈珠在大球上面維持靜止時，其所在位置之半徑與鉛直線所成之最大夾角為 θ。則彈珠與球面之靜摩擦係數為若干？

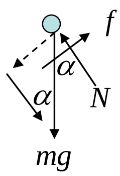


［解析］：



靜止 $\begin{cases} mg\cos\alpha = N \\ mg\sin\alpha = f \end{cases} \Rightarrow \quad f = N\tan\alpha$

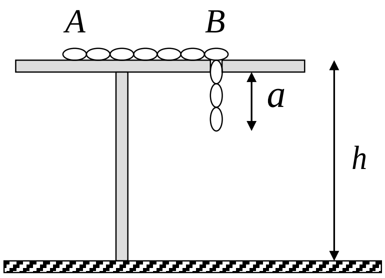
$$f = N\tan\alpha \le \mu_s N \qquad \mu_s \ge \tan\alpha$$



所在位置之半徑與鉛直線所成之最大夾角為 θ

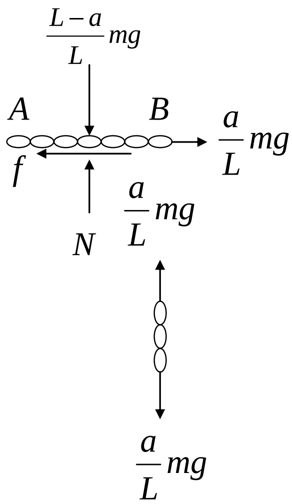
$$\mu_s = \tan\theta$$

例題：



總長度 L，質量 m 之鏈條，一端 AB 置於水平桌面上，其 B 端穿過桌面上之小孔垂下一長度 a，如圖所示，小孔與鏈條之間無摩擦。若桌面與鏈條間之靜摩擦係數為 μ，則鏈條不會下溜之條件為何？

[解析]：



$$\sum F_y = 0 \quad N - \frac{L-a}{L}mg = 0 \quad N = \frac{L-a}{L}mg$$

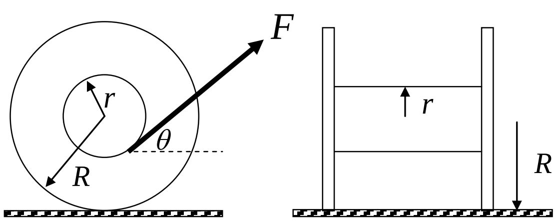
$$\sum F_x = 0 \quad \frac{a}{L}mg - f = 0 \quad f = \frac{a}{L}mg$$

鏈條不會下溜之條件： $f \le f_{\max}$

$$\frac{a}{L}mg \le \mu\frac{L-a}{L}mg \quad \Rightarrow \quad \mu \ge \frac{a}{L-a}$$

例題：

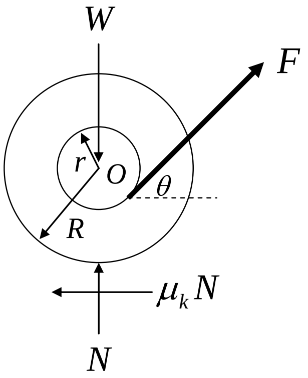
在一水平面上有一線軸，其重量為 W、內軸半徑為 r、外軸半徑為 R，線軸與水平面的動摩擦係數為 μ_k，如圖所示。將一細繩的一端纏繞於線軸，一端以力 F 斜向上拉，拉力方向與水平面的夾角為 θ。則當 r 與 R 滿足什麼條件時，此線軸會在水平面上等速移動而不會轉動？



[解析]： 等速移動而不會轉動 $\begin{cases}\sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M = 0\end{cases}$

$$\begin{cases}\sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_O = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}F\cos\theta - \mu_k N = 0 \\ F\sin\theta + N - W = 0 \\ Fr - \mu_k NR = 0\end{cases} \rightarrow Fr - F\cos\theta R = 0$$

$$\cos\theta = \frac{r}{R}$$



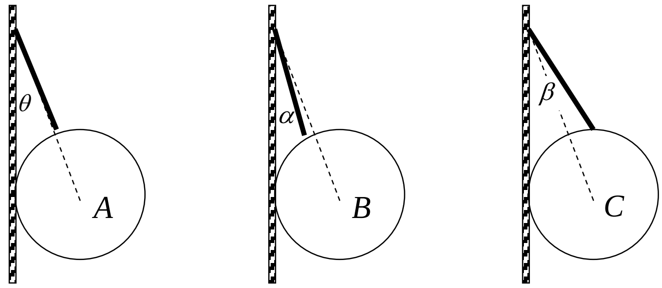
例題：

三均勻球重 W，各以細繩吊於牆壁上，線與牆壁的夾角為 θ、α、β（$\alpha<\theta<\beta$）。(a)圖中的細繩方向通過球心，(b)、(c)則否。請回答下列問題

(1)繪出三球所受的力圖

(2)三圖中，牆壁與球之間有摩擦力者為哪一圖，其方向為何？

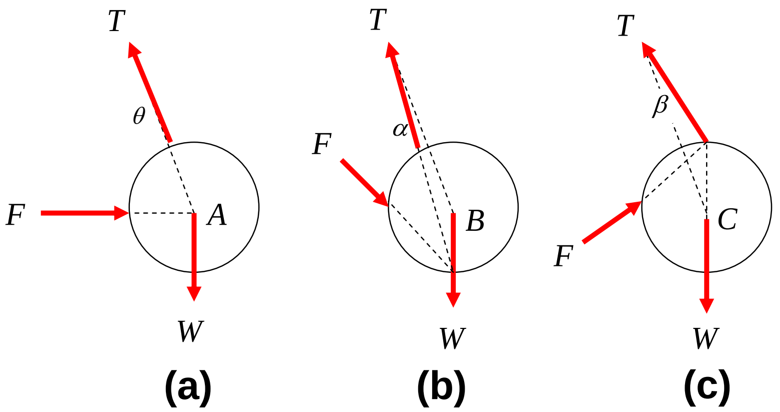
(3)求（a）細繩的張力及牆壁對球的作用力為何？



(a) (b) (c)

[解析]：

(1)



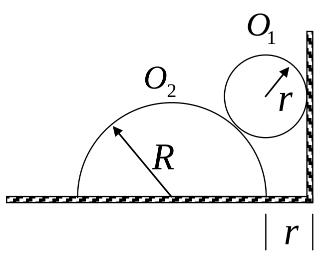
(2) (b)圖，摩擦力向下

(c)圖，摩擦力向上

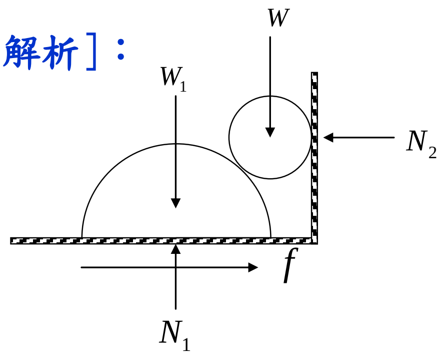
(3) $T = W\sec\theta \qquad F = W\tan\theta$

例題：

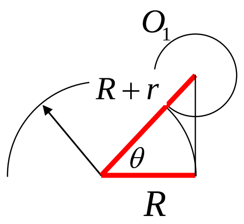
半徑為 r，重量為 W 的光滑球 O_1 放在半徑為 R 的半圓柱體 O_2 和鉛直牆面間，半圓柱體 O_2 與牆之間的距離為 r，如圖所示。球 O_1 與半圓柱體 O_2 都處於靜止狀態，求半圓柱體 O_2 底面與水平地面間的摩擦力大小為何？

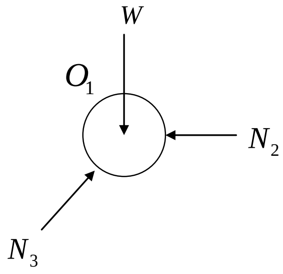


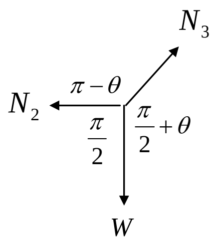
[解析]：



$$\sum F_x = 0 \qquad N_2 - f = 0 \qquad f = N_2$$







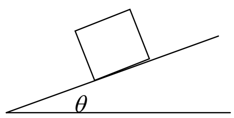
$$\cos\theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + r^2}} \qquad \frac{N_2}{\sin(\frac{\pi}{2} + \theta)} = \frac{W}{\sin(\pi - \theta)} \qquad N_2 = \frac{W}{\sin\theta}\cos\theta = W\tan\theta$$

例題：

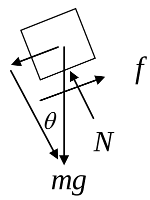
質量 m 之物體與斜面間之靜摩擦係數為 0.8，動摩擦係數為 0.6。此物置於斜面上，當斜角由 0^0 調至 37^0 時，該物所受之摩擦力為多少？

[解析]：

設物體即將開始下滑時的角度為 θ



$$\mu_s = \tan\theta \qquad \tan\theta = 0.8$$



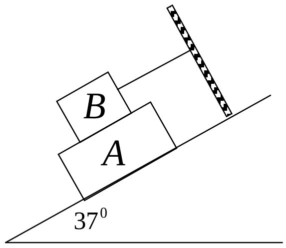
當斜角為 37^0 時 $\tan 37^0 = 0.75 < 0.8$

表示此時物體尚未下滑，仍靜止不動。則

$$f = mg\sin\theta = mg\sin 37^0 = 0.6mg$$

例題：

如圖所示，在斜角為 37^0 的固定斜面上，物體 B 以輕繩繫住，各接觸面間之靜摩擦係數皆為 0.5，物體 A 質量為 m。則 A 可平衡時，B 之質量至少為多少？



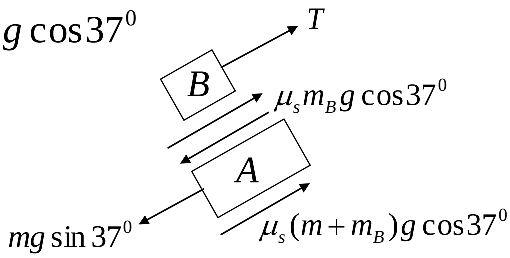
［解析］：

A 可平衡的最寬條件為上下方接觸面摩擦力皆取最大靜摩擦力

$$mg\sin 37^0 \le \mu_s m_B g\cos 37^0 + \mu_s (m+m_B) g\cos 37^0$$

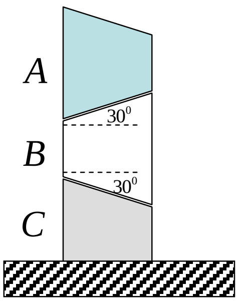
$$m\tan 37^0 \le \mu_s (m+2m_B)$$

$$m_B \ge \frac{1}{4}m$$

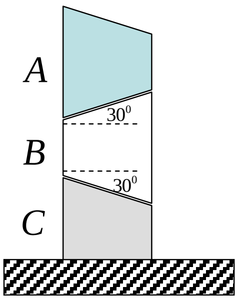


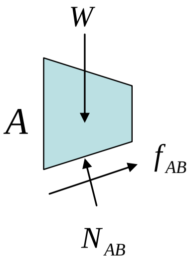
例題：

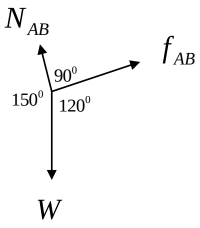
水平桌面上有 A、B、C 三木塊堆疊再一起，呈靜止狀態，如圖所示。已知木塊 A、B、C 之重量分別為 W、2W、3W，則 A、B 間的摩擦力與 B、C 間的摩擦力比值為多少？



［解析］：

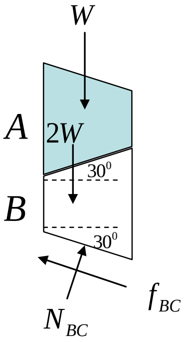


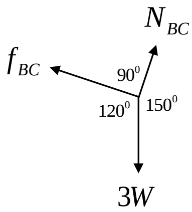




$$\frac{W}{\sin 90^0} = \frac{f_{AB}}{\sin 150^0}$$

$$f_{AB} = \frac{W}{2}$$



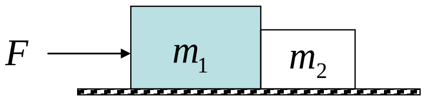


$$\frac{3W}{\sin 90^0} = \frac{f_{BC}}{\sin 150^0}$$

$$f_{BC} = \frac{3W}{2}$$

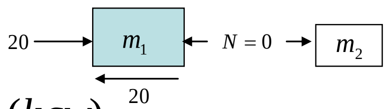
$$\frac{f_{AB}}{f_{BC}} = \frac{1}{3}$$

例題：



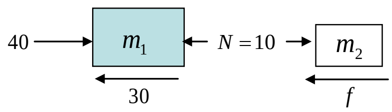
如圖所示，$m_1 = 100\ Kg$， $m_2 = 69\ Kg$ ，二物體與水平面間之靜摩擦係數皆為 0.3。若(1) $F = 20\ Kgw$ (2) $F = 40\ Kgw$；則 m_1 與 m_2 之間的作用力分別為若干？

［解析］：



(1) 對 m_1 物體而言 $f_{1\max} = 0.3 \times 100 = 30\ (kgw)$

$F = 20 < f_{1\max} = 30$ $\quad \therefore m_1$ 靜止不動 $\quad N = 0$



(2) $\sum F_x = 0 \quad 40 - 30 - N = 0$

$N = 10$

例題：

如圖所示，A、B、C 三物體質量均為 m，只有 A、B 和水平地面間有摩擦力，其最大的靜摩擦力皆為 0.5mg，C 與平面間沒有摩擦。今對 A 施一水平向右之力 0.6mg，則下列何者正確？

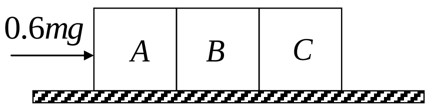
(A) A 受摩擦力為 0.6mg

(B) 作用於 B 之力為 0.3mg

(C) B 作用於 C 的力為零

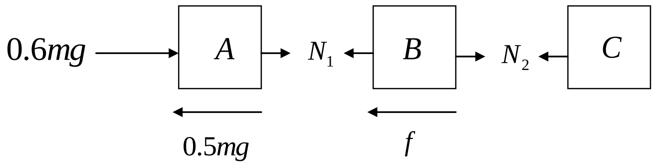
(D) B 受摩擦力為 0.5mg

(E) A 作用於 C 的力為 0.3mg



［解析］： **(C)**

對 A 、B 物體而言 $f_{A\max} = f_{B\max} = 0.5mg$



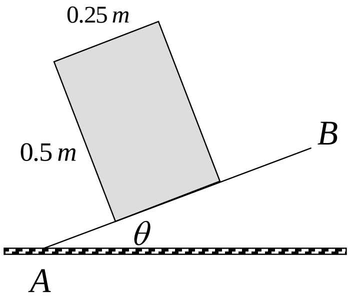
$N_1 = 0.1mg$

對 B 物體而言 $N_1 < f_{B\max}$ $\therefore$ B 靜止不動

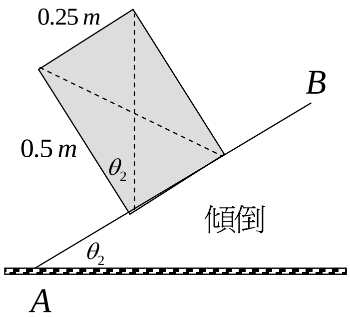
$$N_2 = 0 \qquad f = N_1 = 0.1mg$$

例題：

如圖所示，有一長 0.5 m、寬 0.25 m 的均質木箱靜止在一厚板 AB 上。木箱與厚板的靜摩擦係數為 0.4，若將厚板 B 端慢慢舉起，則木箱傾倒之前會開始滑動嗎？試求木箱開始下滑或傾倒時的角度？



[解析]：



設滑動時角度為 θ_1，傾倒時角度為 θ_2

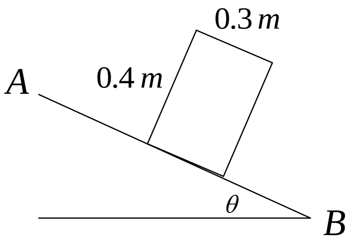
滑動時： $\tan\theta_1 = 0.4$ 傾倒時： $\tan\theta_2 = 0.5$

因 $\tan\theta_1 < \tan\theta_2 \Rightarrow \theta_1 < \theta_2$

表示先滑動而非傾倒 $\theta_1 = \tan^{-1} 0.4 = 21.8^0$

例題：

如圖所示，有一長 0.4 m，寬 0.3 m 的均質物體靜止在厚板 AB 上，物體與厚板的靜摩擦係數為 0.5。問厚板的傾斜角 θ 增大過程中，物體是先下滑或先傾倒？



[解析]：

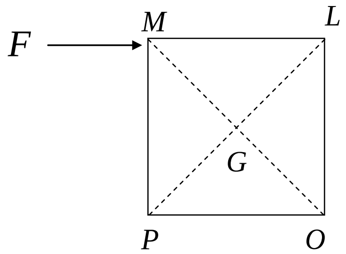
先下滑

例題：

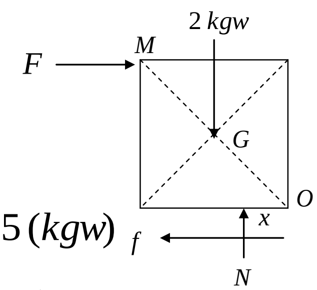
重 2 Kgw 邊長 8 cm 之正立方體置於粗糙平面上，正立方體與平面之靜摩擦係數 0.7，如圖所示，為此正立方體之一截面。自 M 點施一水平力 F，試求

(1)當 F = 0.5 Kgw 時，摩擦力之大小。並求此平面正向力作用點的位置

(2)若 F 力漸次增大，則此正立方體是先滑行還是先傾倒



[解析]：**(1)** $N=2\,(kgw)$　$f_{\max}=0.7N=1.4\,(kgw)$

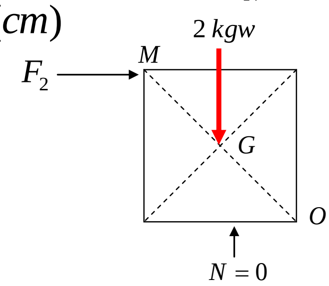


$\because$　$F=0.5\,(kgw)<f_{\max}=1.4\,(kgw)$

$\therefore$ 物體未移動，則摩擦力等於施力 $F=0.5\,(kgw)$

$\sum M_O=0$　$-F\times 8+2\times 4-N\times x=0$　$x=2\,(cm)$

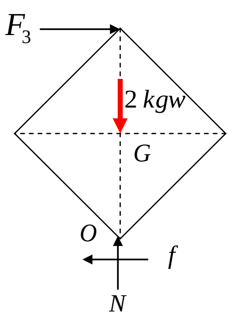
(2) 滑動時，需施力 $F_1=f_{\max}=1.4\,(kgw)$



抬起時，需施力 F_2

$\sum M_O=0$　$-F_2\times 8+2\times 4=0$　$F_2=1\,(kgw)$

當抬起後，因力臂變大，則施力變小，$F_2<F_3$



則傾倒時的最小施力為 $F_2=1(kgw)$。且 $F_2<F_1$

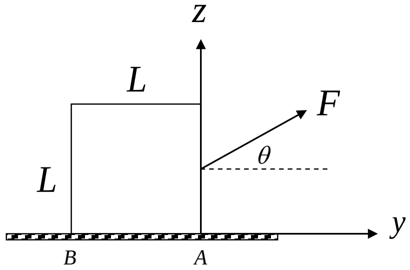
因此，正立方體是先傾倒。

例題：

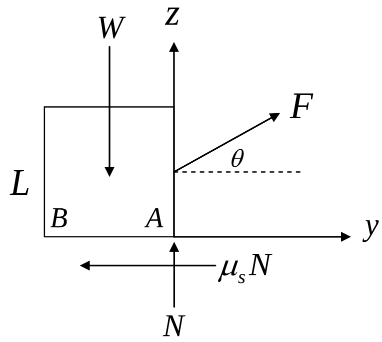
水平桌面上有一邊長為 L 的正立方體。今在此立方體的某垂直面(XZ 平面)的正中央繫一繩，以此繩拉立方體，繩在 YZ 平面且與水平 Y 方向成 θ 角，如圖所示。當拉力 F 逐漸增大時，發現立方體開始滑動的同時，亦開始以 X 軸為轉軸發生轉動。

(1)求桌面與立方體間的靜摩擦係數為多少？

(2)求 θ 範圍



[解析]：



(1) 立方體開始滑動時 $f = f_{\max} = \mu_s N$

以 X 軸為轉軸發生轉動

此時同時具摩擦力與正向力

若轉軸支點位於 A 點(X 軸)

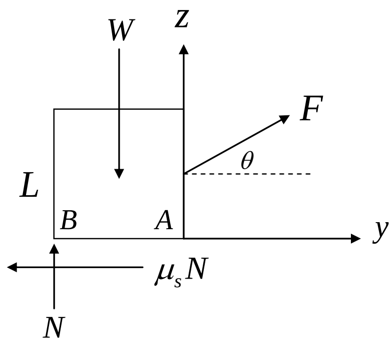
$$\sum M_A = 0 \qquad W\frac{L}{2} - F\cos\theta \times \frac{L}{2} = 0 \qquad F = \frac{W}{\cos\theta}$$

$$\sum F_y = 0 \qquad F\sin\theta - W + N = 0 \qquad N = W(1-\tan\theta)$$

$$\sum F_x = 0 \qquad F\cos\theta - \mu_s N = 0 \qquad W = \mu_s W(1-\tan\theta)$$

$$\mu_s = \frac{1}{1-\tan\theta}$$

(2) 若轉軸 x 軸位於 A 點



$$0 < \mu_s < \infty$$

$$0 < \frac{1}{1-\tan\theta} < \infty \qquad 0 < 1-\tan\theta < \infty$$

$$-1 < -\tan\theta < \infty \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{4}$$

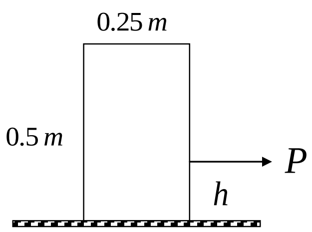
例題：

如圖所示，有一水平力 P，將一高度為 0.5 m，寬 0.25 m 的方形物體，以等速率拖向水平面的右方。若滑動摩擦係數是 0.4，物體重 25 N 且重心在其中心點上。試求

(1) P 的大小

(2)若 h = 0.125 m，則水平面施於物體的正向力 N，其作用線的位置為何？

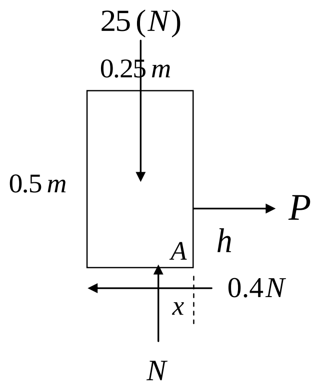
(3)能使物體傾倒的高度 h 是多少？



［解析］：

(1) $\sum F_y = 0 \qquad -25 + N = 0 \qquad N = 25\,(N)$

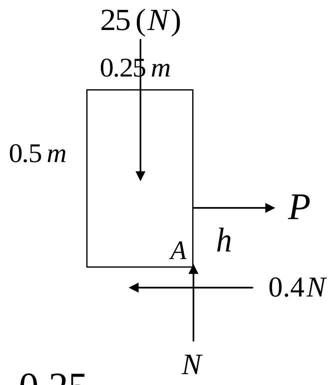
$\sum F_x = 0 \qquad P - 0.4N = 0 \qquad P = 10\,(N)$



(2) $\sum M_A = 0 \qquad W \times \dfrac{0.25}{2} - Nx - P \times 0.125 = 0$

$x = 0.075\,(m)$

(3) 能使物體傾倒



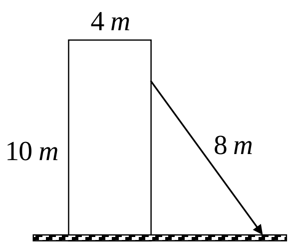
$\sum F_y = 0 \qquad -25 + N = 0 \qquad N = 25\,(N)$

$\sum F_x = 0 \qquad P - 0.4N = 0 \qquad P = 10\,(N)$

$\sum M_A \le 0 \qquad W \times \dfrac{0.25}{2} - Ph \le 0 \qquad h \ge 25 \times \dfrac{0.25}{20} = 0.3125\,(m)$

例題：

如圖所示，10 公斤重之均勻木箱高 10 公尺、寬 4 公尺，靜置於一水平地面。今以固定長度 8 公尺之繩之一端接於木箱，另一端則於地面拉之，則



(A)若木箱地面間無摩擦，則木箱不可能被拉倒

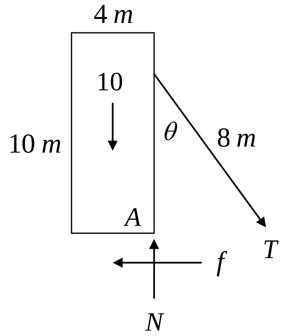
(B)欲使施力最小下可拉倒此木箱，則繩應結於木箱上距地面高度 5 公尺處

(C)欲使施力最小下可拉倒此木箱，則繩應結於木箱上高度中點下方

(D)欲拉倒此木箱，所施之最小拉力為 5 公斤重

(E)欲拉倒此木箱，木箱與地面間靜摩擦係數最小值為 1

[解析]： **(A)(D)**



$$\sum M_A = 0 \qquad 10\times 2-(T\sin\theta)\times(8\cos\theta)=0$$

$$T\sin 2\theta = 5$$

欲使施力最小時， $\sin 2\theta$ 最大，則

$$\theta = 45^0$$

此時繩應結於木箱上距地面高度 $8\cos 45^0 = 4\sqrt{2}\ (m)$

所施之最小拉力 $T=\dfrac{5}{\sin(2\times 45^0)}=5\,(kgw)$

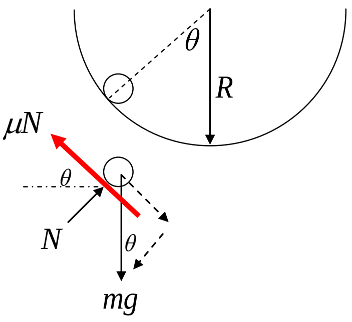
(E) $f = T\sin 45^0 = \dfrac{5}{\sqrt{2}} \qquad N = 10+T\cos 45^0 = 10+\dfrac{5}{\sqrt{2}}$

$f \le \mu_s N \quad \Rightarrow \quad \dfrac{5}{\sqrt{2}} \le \mu_s(10+\dfrac{5}{\sqrt{2}}) \qquad \mu_s \ge \dfrac{5}{10\sqrt{2}+5}$

例題：

一螞蟻在半徑 R 之碗中沿碗壁上爬，若螞蟻與碗壁摩擦係數為 μ ，則此螞蟻可爬升距碗底之最大鉛直高度為何？螞蟻到達最大高度時，碗壁對螞蟻的作用力為若干？

[解析]：

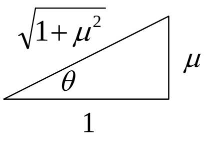


當摩擦力最大時，所能爬行高度越高。

因此摩擦力取最大靜摩擦力。

$$\begin{cases} mg\cos\theta = N \\ mg\sin\theta = \mu N \end{cases} \Rightarrow \quad \mu = \tan\theta$$

碗壁對螞蟻的作用力： $N = mg\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}mg$



最大鉛直高度： $R(1-\cos\theta)=(1-\dfrac{1}{\sqrt{1+\mu^2}})R$

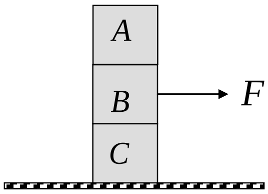
例題：

如圖所示，在水平桌面上有三個物體 A、B、C 疊放在一起。在物體 B 施水平拉力 F，則 A、B、C 三者共同以速度 v 在桌面上等速滑動。則在等速滑動的過程中

(1)物體 B 作用於物體 A 的摩擦力大小為何？

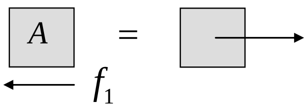
(2)物體 B 作用於物體 C 的摩擦力大小為何？

(3)物體 C 與水平桌面的摩擦力大小為何？



[解析]： 因 A、B、C 三者共同以速度 v 在桌面上等速滑動

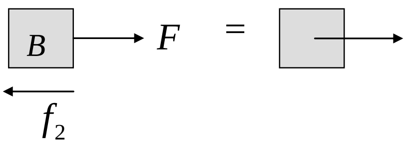
(1)



$m\times 0=0$

$f_1=0$

(2)

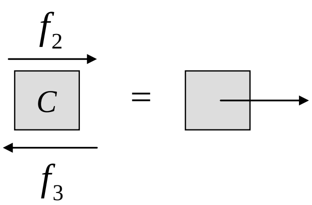


$m\times 0=0$

$F-f_2=0$

$f_2=F$

(3)



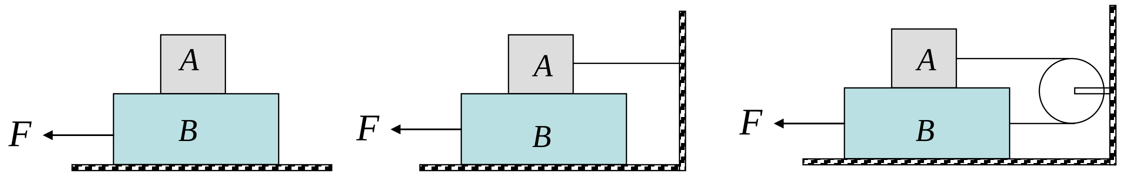
$m\times 0=0$

$f_2-f_3=0$

$f_3=F$

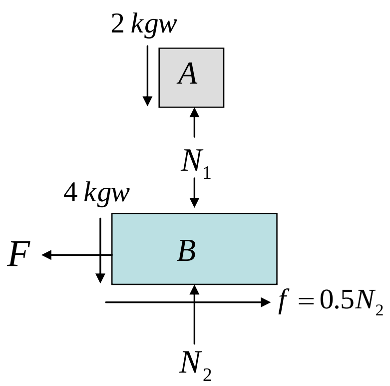
例題：

如圖所示，A、B 兩物體的質量各為 2Kg 與 4 Kg，B 物體均受 F 的拉力作用。假設各接觸面間的摩擦係數均為 0.5，欲使 B 物體等速左移，在三種情況中，所需之拉力各為多少？



[解析]：

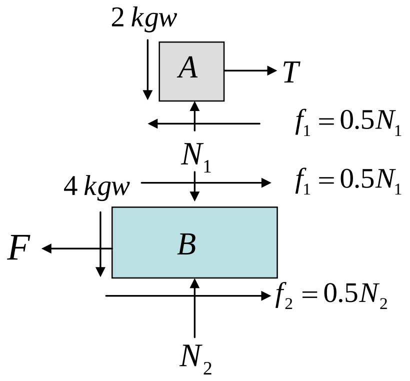
(1) 因物體 B 為等速，若物體 A 具有向左或向右的加速度，兩物體將分離。因此，物體 A 與 B 具相同的等速度運動。則物體 A 不具摩擦力作用。



$$\begin{cases} N_1 - 2 = 0 \\ -N_1 - 4 + N_2 = 0 \\ -F + 0.5N_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_1 = 2\,(kgw) \\ N_2 = 6\,(kgw) \\ F = 3\,(kgw) \end{cases}$$

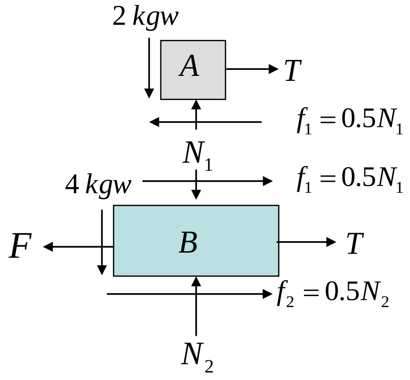
(2)

$$\begin{cases} N_1 - 2 = 0 \\ -N_1 - 4 + N_2 = 0 \\ T - 0.5N_1 = 0 \\ -F + 0.5N_1 + 0.5N_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} N_1 = 2\,(kgw) \\ N_2 = 6\,(kgw) \\ T = 1\,(kgw) \\ F = 4\,(kgw) \end{cases}$$



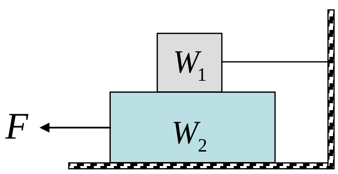
(2)

$$\begin{cases} N_1 - 2 = 0 \\ -N_1 - 4 + N_2 = 0 \\ T - 0.5N_1 = 0 \\ -F + 0.5N_1 + 0.5N_2 + T = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} N_1 = 2\,(kgw) \\ N_2 = 6\,(kgw) \\ T = 1\,(kgw) \\ F = 5\,(kgw) \end{cases}$$



例題：

如圖所示，重物 $W_1 = 5\,Kgw$ ，$W_2 = 20\,Kgw$ 重疊置於水平地面上，W_1 另以細繩繫於牆上，各接觸面間之靜摩擦係數均為 0.4。今於 W_2 上向外施一力 F，欲使 W_2 仍保持靜止，則 F 之最大值及繩之張力為何？



［解析］：

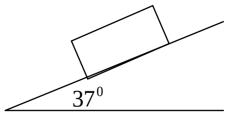
$$\begin{cases} T = 12\,(kgw) \\ F = 2\,(kgw) \end{cases}$$

例題： **(先判斷需往上或往下施力)**

質量為 1000 g 之木塊置於與水平面成 37^0 角之斜面上，木塊與斜面間之摩擦係數為 0.25。今以一與斜面平行之力 F 作用於物體上，而使物體保持靜止不動，則

(1) F 的範圍為何？

(2)若 F = 5 N，則物體該如何運動？此時摩擦力為何？



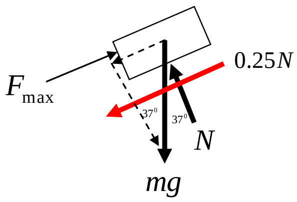
［解析］： $N = mg\cos 37^0 = 8\,(N)$ $\quad mg\sin 37^0 = 6\,(N)$

∵ $mg\sin 37^0 > \mu N$，表示物體會下滑，需往上施力。

(1) 上滑趨勢： $F_{\max} - 0.25 \times N - mg\sin 37^0 = 0$

$$F_{\max} = 8\,(N)$$

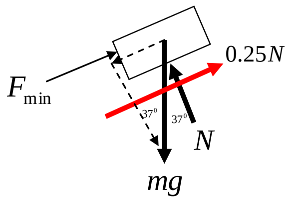
上滑



下滑趨勢： $F_{\min} + 0.25 \times N - mg\sin 37^0 = 0$

$$F_{\min} = 4\,(N)$$

下滑



使物體保持靜止不動施力範圍：

$$4 \le F \le 8$$

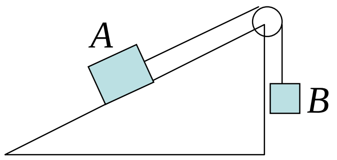
(2) ∵所施外力 $F = 5\,(N)$ $\quad F = 5\,(N) < mg\sin 37^0 = 6\,(N)$

∴物體具有下滑趨勢，但仍靜止不動。此時摩擦力

$$mg\sin 37^0 - F = f = 1\,(N,\text{向上})$$

例題：

如圖所示，斜面長 50 cm，高 40 cm，重 25 Kg 的物體 A 與斜面間的靜摩擦係數為 0.4，滑動摩擦係數為 0.2。滑輪摩擦不計，則 B 的重量為多少公斤時，系統將會靜止不動？



[解析]： $N = 25g\cos 53^0 = 15g\ (N)$　　$mg\sin 53^0 = 20g\ (N)$

$\because$ $mg\sin 53^0 > \mu N$，表示物體會下滑，需具往上施力 T。

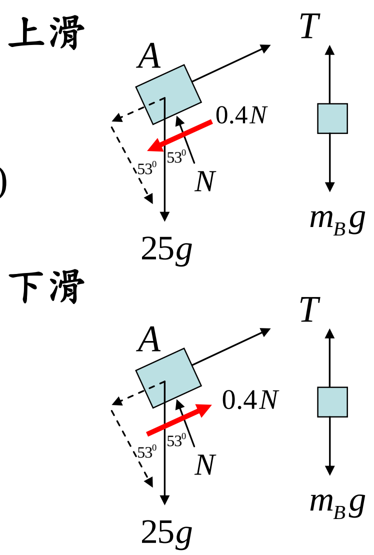
$\because$系統靜止不動　$T = m_B g$

上滑趨勢：$T_{\max} - 0.4\times N - mg\sin 53^0 = 0$

$$T_{\max} = 26g\ (N) \qquad m_{B\max} = 26\ (kg)$$

下滑趨勢：$T_{\min} + 0.4\times N - mg\sin 53^0 = 0$

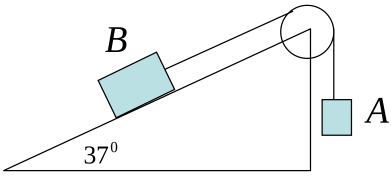
$$T_{\min} = 14g\ (N) \qquad m_{B\min} = 14\ (kg)$$



使物體保持靜止不動的重量範圍：

$$14 \le m_B \le 26$$

例題：



如圖所示， B 物體的質量為 10 Kg 與斜面間之靜摩擦係數為 0.5

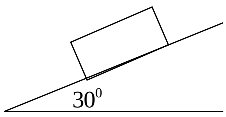
(1)欲使 B 物體開始向上滑動，A 之質量不能小於多少？

(2)欲使 B 物體開始向下滑動，A 之質量不能大於多少？

[解析]：

$$2 \le m_A \le 10$$

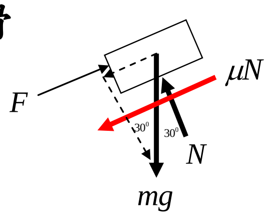
例題：



一物體靜止放在與水平成 30^0 角的斜面上，設欲推動該物體沿斜面上滑所需平行於斜面之力為 F，欲推動該物體沿斜面下滑所需平行於斜面的力為 F/9，則該物體與斜面之靜摩擦係數約為多少？

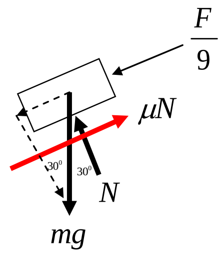
[解析]：

上滑



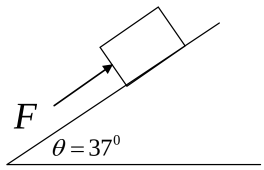
$$\begin{cases} F - \mu N - mg\sin 30^0 = 0 \\ -\dfrac{F}{9} + \mu N - mg\sin 30^0 = 0 \end{cases} \qquad N = mg\cos 30^0$$

下滑



$$\mu = \frac{5}{4\sqrt{3}}$$

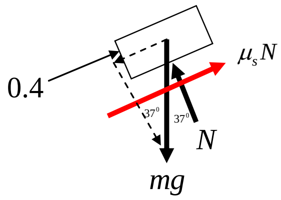
例題：



如圖所示，質量為 0.1 Kg 之木塊置於一和水平面成 37^0 角的斜面上。今沿斜面施一平行於斜面的力 F，若使其平衡的最小力為 0.4 牛頓，則木塊和斜面間之靜摩擦係數為何？(g = 10 m/s^2)

[解析]：

下滑

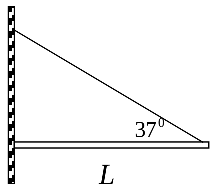


$$N = mg\cos 37^0 = 0.8\,(N)$$

下滑趨勢： $0.4 + \mu_s N - mg\sin 37^0 = 0$

$$\mu_s = 0.25$$

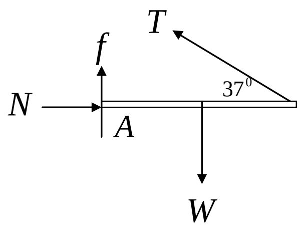
例題： 一均勻木棒重 W，一端頂住鉛直牆壁，另一端以輕繩繫於牆上使木棒成水平平衡，如圖所示。求



(1)牆對木棒作用力大小為何？

(2)牆與木棒間之靜摩擦係數範圍為何？

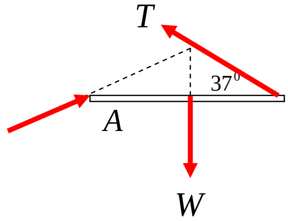
[解析]：



(1) $\sum M_A = 0 \quad T\sin 37^0 \times L - W \times \dfrac{L}{2} = 0 \quad T = \dfrac{5}{6}W$

$\sum F_x = 0 \quad N - T\cos 37^0 = 0 \quad N = \dfrac{2}{3}W$

$\sum F_y = 0 \quad f - W + T\sin 37^0 = 0 \quad f = \dfrac{1}{2}W$

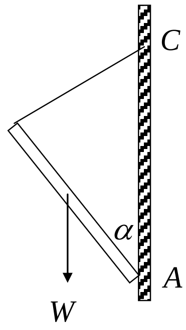


牆對木棒作用力大小： $\sqrt{N^2 + f^2} = \dfrac{5}{6}W$

(2) 使木棒成水平平衡不動 $\quad f \le \mu_s N \quad \dfrac{1}{2}W \le \mu_s \dfrac{2}{3}W \quad \mu_s \ge \dfrac{3}{4}$

例題：

如圖所示，一均勻木棒 AB 重 W，B 端以細繩繫於鉛直壁 C 點上，另一端 A 則倚靠於鉛直壁而在 C 點之正下方且 AB = AC。平衡時，棒與壁成 α 夾角。下列敘述何者正確？



(A)棒受重力、繩上張力 T 及壁之抗力 R 三力而成平衡

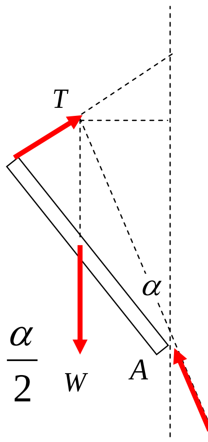
(B) R 之方向與鉛直壁成垂直

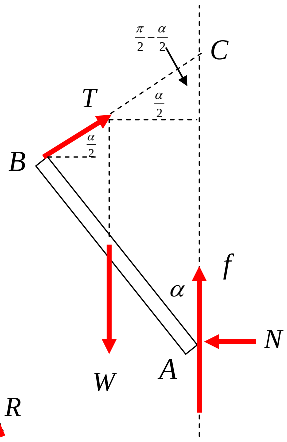
(C) W、T 及 R 必定經過同一點

(D) $R = W\sin\dfrac{\alpha}{2}$

(E) $T=\sqrt{W^2-R^2}$

[解析]： **(A)(C)(E)**





$$\sum M_C = 0 \quad W\times\frac{L}{2}\sin\alpha - N\times L = 0$$

$$N=\frac{W}{2}\sin\alpha$$

$$\sum F_x = 0 \quad T\cos\frac{\alpha}{2} - N = 0 \quad T = W\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\sum F_y = 0 \quad f - W + T\sin\frac{\alpha}{2} = 0 \quad f = W\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{W}{2}(1+\cos\alpha)$$

牆對木棒作用力大小：

$$R=\sqrt{N^2+f^2}=\sqrt{(\frac{W}{2}\sin\alpha)^2+[\frac{W}{2}(1+\cos\alpha)]^2}=W\cos\frac{\alpha}{2}$$

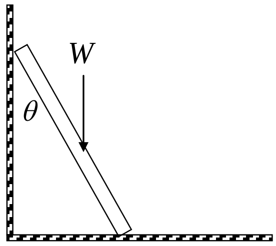
$$T^2+R^2=W^2$$

例題：

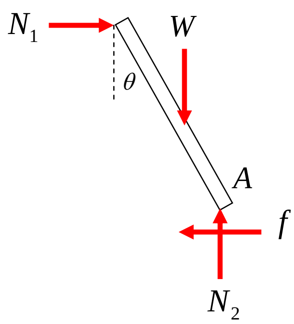
若一梯子長 L，重量可忽略，靠在牆與地上，如圖所示，牆面光滑。一個重 W 的人站在梯的中央，問

(1)梯子與牆和地面的作用力各為若干？

(2)若人稍往上爬，梯子便開始下滑。計算梯子與地面的靜摩擦係數？



［解析］：



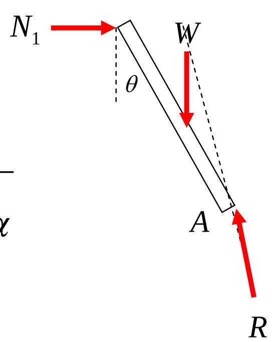
(1) $\sum M_A = 0 \qquad -N_1 L\cos\theta + W\times\dfrac{L}{2}\sin\theta = 0$

$$N_1 = \frac{W}{2}\tan\theta$$

$\sum F_x = 0 \qquad N_1 - f = 0 \qquad f = \dfrac{W}{2}\tan\theta$

$\sum F_y = 0 \qquad -W + N_2 = 0 \qquad N_2 = W$

$$R = \sqrt{N_2^2 + f^2} = \sqrt{W^2 + (\frac{W}{2}\tan\alpha)^2} = W\sqrt{1+\frac{1}{4}\tan^2\alpha}$$



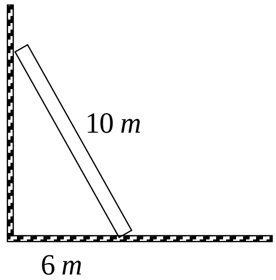
(2) $f \le \mu_s N_2 \qquad \dfrac{W}{2}\tan\theta \le \mu_s W \quad\Rightarrow\quad \mu_s \ge \dfrac{1}{2}\tan\theta$

例題：

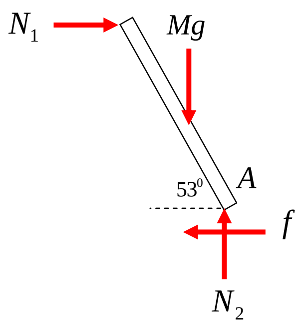
由平滑之鉛直壁前方 6 公尺處，立一長 10 公尺，質量 M 公斤的梯子在壁上，如圖所示。地面與梯子間的靜摩擦係數為 0.5

(1)求梯子上端及下端的作用力各若干？

(2)一人重 5M 公斤，由梯子的下端往上端攀登，問可登上多少距離而不置於使梯子下滑？



［解析］：



(1) $\sum M_A = 0 \qquad -N_1 L\sin 53^0 + Mg\times\frac{L}{2}\cos 53^0 = 0$

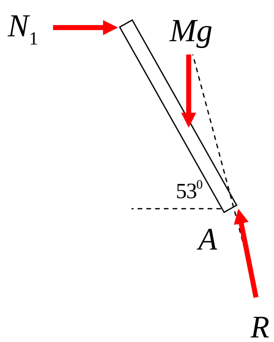
$$N_1 = \frac{3}{8}Mg$$

$\sum F_x = 0 \qquad N_1 - f = 0 \qquad f = \frac{3}{8}Mg$

$\sum F_y = 0 \qquad -Mg + N_2 = 0 \qquad N_2 = Mg$

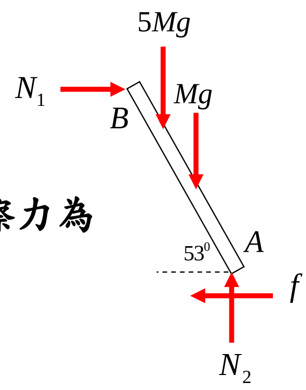
$\because \quad f_{\max} = \mu_s N_2 = 0.5Mg \qquad f < f_{\max}$

$\therefore$ 梯子未滑動



$$R = \sqrt{N_2^2 + f^2} = \sqrt{(Mg)^2 + (\frac{3}{8}Mg)^2} = \frac{\sqrt{73}}{8}Mg$$

(2)



$$\sum F_y = 0 \qquad -5Mg - Mg + N_2 = 0 \qquad N_2 = 6Mg$$

設登上梯子距離 x 時，梯子恰會滑動，此時摩擦力為

$$f = \mu_s N_2 = 0.5(6Mg) = 3Mg$$

$$\sum M_B = 0$$

$$-5Mg(10-x)\cos 53^0 - Mg\times 5\cos 53^0 - f\times 10\sin 53^0 + N_2\times 10\cos 53^0 = 0$$

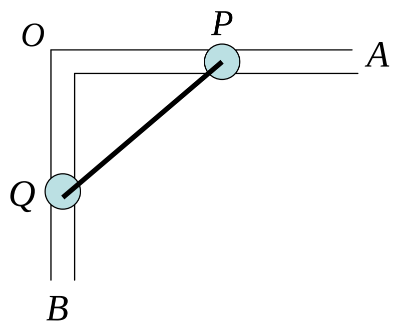
$$-5(10-x)\cos 53^0 - 5\cos 53^0 - 3\times 10\sin 53^0 + 6\times 10\cos 53^0 = 0$$

$$-5(10-x)\times\frac{3}{5} - 5\times\frac{3}{5} - 3\times 10\times\frac{4}{5} + 6\times 10\times\frac{3}{5} = 0$$

$$x = 7\ (m)$$

例題：有一個直角支架 AOB，AO 水平放置，表面粗糙，OB 鉛直向下，表面光滑。AO 上套有小環 P，OB 上套有小環 Q，兩環質量均為 m，兩環由一根質量可忽略、不可伸長的細繩相連，並在某一位置平衡，如圖所示。現將 P 環向左移一小段距離，兩環再次達到平衡，那麼將移動後的平衡狀態和原來的平衡狀態比較，AO 桿對 P 環的支撐力 F_N 和摩擦力 f 的變化情況是

(A) F_N 不變，f 變大
(B) F_N 不變，f 變小
(C) F_N 變大，f 變大
(D) F_N 變大，f 變小

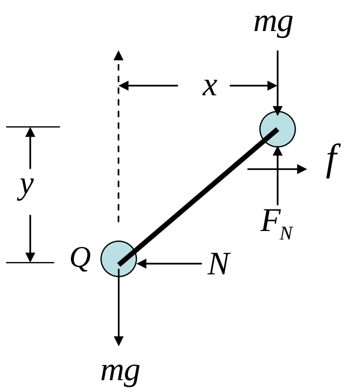


[解析]： **(B)**

$\sum F_y = 0 \qquad F_N - mg - mg = 0 \qquad F_N = 2mg$

$\sum M_Q = 0 \qquad (F_N - mg)x - fy = 0$

$$f = \frac{(F_N - mg)x}{y} = \frac{x}{y}mg$$



因移動後的平衡狀態，x 變小而 y 變大，則 f 變小

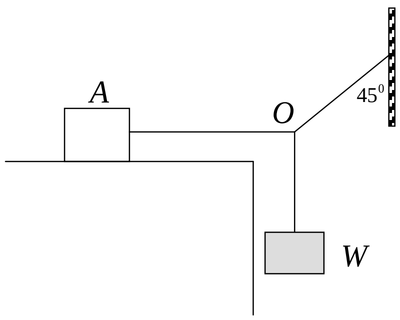
$F_N = 2mg$ 不變

例題：

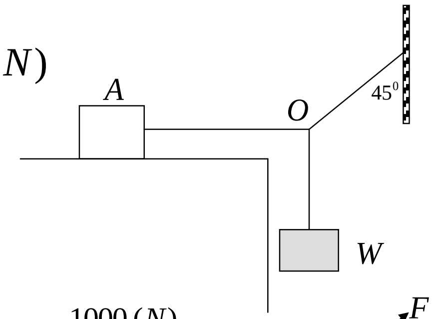
如圖所示，木塊 A 重 100 Kg，木塊 A 與桌面之最大靜摩擦係數為 0.3。而懸掛之物體重 20 Kg 且整個系統在平衡狀態。求

(1)木塊 A 與桌面之摩擦力為何？($g = 10m/s^2$)

(2)試求能使整個系統處於平衡時，懸掛物質量的最大值？



[解析]： $f_{\max} = \mu_s N = 0.3 \times (1000) = 300\ (N)$

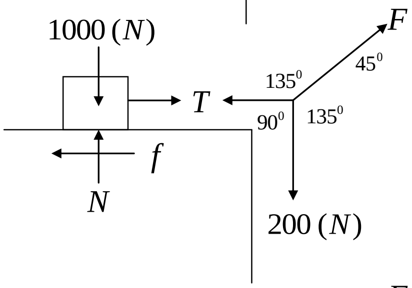


(1) $\dfrac{200}{\sin 135^0} = \dfrac{F}{\sin 90^0} = \dfrac{T}{\sin 135^0}$

$T = 200\ (N)$

$\sum F_x = 0 \qquad T - f = 0 \qquad f = 200\ (N)$

$\because\ f < f_{\max}$，物體仍靜止。



(2) $\dfrac{300}{\sin 135^0} = \dfrac{W \times 10}{\sin 135^0} = \dfrac{F}{\sin 90^0}$

$W = 30\ (kg)$