第 4-1 節 牛頓第一運動定律

慣性： 物體保持動狀態之特性

物體的慣性與它的質量有關，物體質量越大，要改變它的運動狀態越不容易，也就是越難被加速或減速，因此它的慣性也就越大。

牛頓第一運動定律： 又稱慣性定律

(1)物體若不受外力或所受的外力和為零，靜者恆靜，動者恆沿一直線做等速度運動。

(2)慣性座標系：指靜止或做等速度運動的座標系統。牛頓第一定律的主要意義，就是對慣性座標下定義。牛頓的三個運動定律只在慣性座標系統中才成立。

常見的慣性現象

(1)靜止的汽車突然開動，車上的人因慣性而向後傾斜。急駛的車子突然停止，車上的人因慣性而向前衝。

(2)甩動衣服，可除去灰塵。

(3)揮動筆桿驟停，即可灑去筆上的墨水

(4)搖動果樹可以使果實掉下

(5)刀柄鬆脫，只需將柄在地上一擊，刀就會崁入柄內

(6)賽跑的人到達終點，不能立即停止

(7)從急行的車上跳下，常易跌倒

(8)雨天車輪上的泥水，沿圓形車輪的切線離去

(9)於地表向東或向西跳遠的紀錄相同

(10)在赤道朝正北方射擊砲彈，會落在瞄準線的東方

例題：

從靜止開始沿左邊斜面滾下物體，能滾上右邊另一斜面一直到原有高度為止。若右邊斜面坡度減小時，則

(A)每次在右邊斜面上所能達到的鉛直高度仍相同

(B)在右邊斜面的水平距離增加

(C)在右邊斜面的運動距離增加

(D)在右邊斜面的運行時間增加

(E)在右邊斜面的加速度變小

[解答]：

(A)(B)(C)(D)(E)

例題：

伽立略慣性實驗改用單擺的擺動

(A)主要目的是減少摩擦

(B)若擺長 50 cm 的線懸掛 10 g 的物體自右邊高 15 cm 處擺下，則擺至左邊的高度為 15 cm。

(C)如在最低點往上高 10 cm 處置一阻擱的橫桿，不使擺線完全擺動，只有小部分擺動，則在左邊的高度為 10 cm。

(D)當質量改為 20 g 時，擺至左邊高度仍為 10 cm。

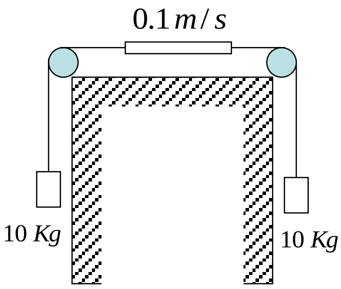
(E)增高橫桿的高度，就如同伽立略實驗時，增加斜面之上滑行度

[解答]：

(A)(B)

例題：

設圖中之彈簧秤及質量系統一齊做等速運動，其速率為 0.1 m/s，則彈簧秤上指標所顯示的值應為多少牛頓？



[解答]：

98 牛頓

例題：

北半球海防部隊發現北方有敵艦靜立於海面，若欲使砲彈命中該艦，則發射時，方向應朝

(A)正北 (B)向北偏西 (C)向東 (D)向西

[解答]：

(B)

因地球由西向東自轉，赤道上自轉速率越大，越向北方自轉速率越小。所以砲彈所在地的自轉速率大於敵艦處的自轉速率。所以欲命中敵艦，應略向西偏移。

例題：

下列有關慣性現象的敘述何者正確？

(A)北半球的長程大砲往正北方發射，將命中其正北方目標物的西方

(B)北半球的長程大砲，欲命中其正北方的目標，應朝北偏西發射

(C)不計空氣阻力，等速飛行的飛機上陸續丟下一批炸彈，在遠處拍下飛機與正落下的炸彈照片，見飛機與陸續丟下的數顆炸彈的連線為直線

(D)一乾冰圓盤靜置於一靜止轉盤的邊緣，因兩者間無摩擦力，故當轉盤開始旋轉時，乾冰盤沿切線方向飛出

[解答]： $(B)(C)$

例題：

下述物理現象何者可以慣性定律解釋？

(A)在等速進行的火車中，鉛直上拋一球仍回原處

(B)斧頭鬆脫時，執柄向下敲擊，斧頭即自動崁入柄內

(C)一玻璃杯置於長紙條上，若用手急拉，則杯穩然不動

(D)站在汽車內的乘客，當汽車突然開動，易向後仰，突然停止，易向前傾。

(E)馬戲團騎師在奔馳的馬背上躍起，依然落在馬背上

[解答]：

$(A)(B)(C)(D)(E)$

例題：

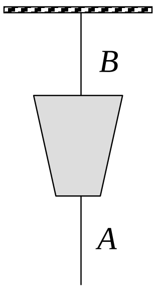
在大草原上，向南行駛的探險車突然向右轉，則乘客向哪個方向傾斜？

(A)前　　**(B)**後　　**(C)**左　　**(D)**右

[解答]：

(*C*)

例題：



如圖所示，一個 10 公斤重的物體以 B 線懸之，此線恰能支持，其下方亦有同材質的 A 線繫之。手若拉下端的 A 繩，當手逐漸加力時，則

(A) B 繩先斷

(B) A 繩先斷

(C)兩繩同時斷

(D)若是用力猛然一拉時，B 繩先斷

(E)若是用力猛然一拉時，A 繩先斷

[解答]：

(A)(E)

例題：

一人在車廂中以 5 公尺/秒 之初速度垂直拋起一球，設此車廂以 5 公尺/秒 做等速度運動。若不考慮空氣阻力，則

(A)車上的觀察者見球的運動軌跡為直線

(B)在地面上的觀察者見球的運動軌跡為拋物線

(C)球在空中運動的時間約為 1 秒後落回手上

(D)地上的人見球以 $5\sqrt{2}$ 公尺/ 秒 的速率落於人的手上

(E)車上的人見球以 5 公尺/ 秒 的速率落於人的手上

[解答]：

$(A)(B)(C)(D)(E)$

例題：

在一等加速度運動的火車上，相對於火車鉛直向上投出一球，下列敘述何者正確？

(A)由地面觀察時，球在空中的運動軌跡為直線

(B)地面觀察時，球在水平方向做等加速度運動

(C)由火車的觀點來看，球的運動軌跡為直線

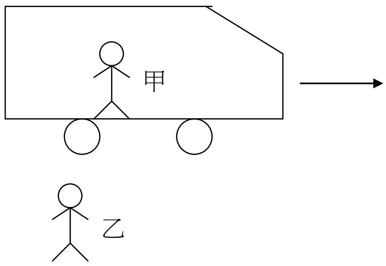
(D)由火車的觀點來看，球做等加速度運動

(E)由火車的觀點來看，球在水平方向及鉛直方向均做等加速度運動

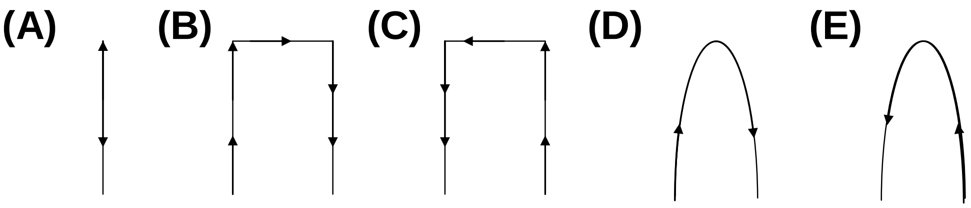
[解答]：

(D)(E)

例題：



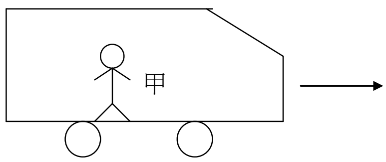
有兩位學生在水平地面上合作進行一項實驗。甲生站在以等速向右前進的車廂地板上，乙生則靜止站在地面上，如圖所示。當車子通過乙生面前時，甲生沿垂直於車廂地板的方向，向上拋出一棒球後，讓其自由落下。則甲、乙兩生看到的棒球運動軌跡為何？



[解答]：

甲：(A)　　乙：(D)

例題：



有一同學站在行駛中的車內，當他剎車時，他的身體會向前傾。依據右圖，下列哪一選項是造成同學身體向前傾的主要理由？

(A)車輪給同學一向前的力

(B)車內的空氣給同學一向前的力

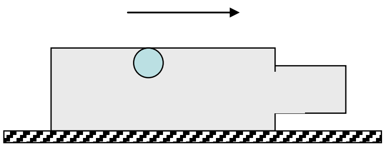
(C)車的地板給同學一向後的摩擦力

(D)車在剎車時，改變了同學重力的方向

[解答]：

(C)

例題：

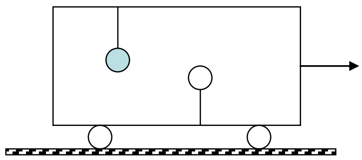


如圖所示，水平放置的小瓶內有水，其中有一氣泡。當瓶從靜止狀態突然向右運動時，小氣泡在瓶內將向何方運動？

[解答]：

向右移動。因質量越大慣性越大，因此水相對於水停留在原處，氣泡向右移動。

例題：



水平地面上靜止密閉公車內地板繫一汽球，天花板懸一鐵球，如圖所示。若公車突然向前加速前進，下列敘述何者正確？

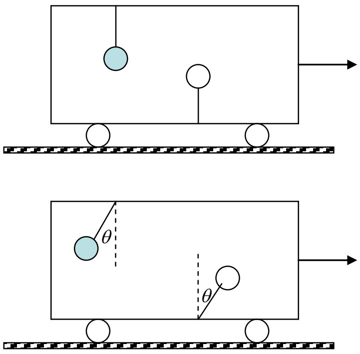
(A)車上觀察者見鐵球向車後方偏

(B)車上觀察者見繫鐵球之繩張力變大

(C)車上觀察者若使鐵球以單擺方式擺動，則見其週期相對於公車不動時為大

(D)車上觀察者見汽球向車後方偏

(E)對車上觀察者而言，汽球受一向後的假想力作用



[解答]： (A)(B)(E)

鐵球向後偏，氣球向前偏

繫鐵球之繩張力 $F = m\sqrt{g^2 + a^2} = mg'$

週期 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g'}} < 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$

鐵球、汽球所受的假想力皆往後

第 4-2 節 牛頓第二運動定律

質量的定義

1. 慣性質量（m）：利用牛頓第二運動定律 $F = ma$

2. 重力質量（m_g）：利用等臂天平，因重力 $W = m_g g$ 產生之靜力(力矩)平衡所測量出

3. 性質：

(1)質量 m 為物體本身的性質，不隨時間、地點而變

(2)物體所含的質量可以看成物體對抗外力、保持原來運動狀態的一種特性，此特性稱為物體的慣性。

(3)一般的物理化學反應，質量守恆定律成立

牛頓第二運動定律適用範圍

1. 儘適用慣性座標系，在加速座標系需以假想力修正
2. 儘適用於低速運動物體，在速度接近光速時以相對論修正
3. 儘適用於大物體，在微小粒子以量子力學修正

F = ma 的單位

	質量	加速度	力的絕對單位	力的重力單位	單位換算
S.I. 制	kg	m/s^2	$N = kg \cdot m/s^2$	kgw	$1\,kgw = 9.8\,N$
C.G.S. 制	g	cm/s^2	$Dyne = g \cdot cm/s^2$	gw	$1\,gw = 980\,Dyne$

$$1\,N = 10^5\ Dyne$$

重量

物體受到萬有引力，可將物體懸掛在彈簧秤下，由彈簧的伸長量，測量物體重量。

1. 地表重力加速度：物體受萬有引力而產生的加速度，稱為重力加速度。在地表 1 公里以內的重力加速度，
   $g = 9.8\,m/s^2 = 980\,cm/s^2$，可視為定值。
2. 地表物重：物體靜止在地表時所受重力，$W = mg$。
   $1\,kgw = 9.8\,N$　　$1\,gw = 980\,Dyne$
3. 重量與質量：重量為一向量，其方向為物體所受引力的方向。會隨各地重力加速度的改變而改變。質量是物體本身的性質，不具方向性，也不隨位置、時間而改變。

例題：

(1)在無重力場處，靜止或等速的太空艙中，能否利用天平及彈簧秤測定質量？何故？

(2)在月球表面上，能否利用天平及彈簧秤測定質量？何故？

[解答]：

(1)天平為利用力矩原理測質量，因無力量作用，無法產生力矩。因此無法測定質量。

因無力量作用，無法利用彈簧秤測得重量，因此以力量方式無法測出質量。但是彈簧可利用簡諧運動，測出週期與彈力常數即可算出物體質量。

(2)月球表面上有重力場，可利用天平及彈簧秤測定質量。

例題：

下列有關質量的敘述何者正確？

(A)在無重力場的太空中可以測得慣性質量

(B)在月球上測得的慣性質量與在地球上測得的相同

(C)慣性質量的測得是利用力矩平衡的原理

(D)在等加速度上升的電梯中測得的慣性質量較大

(E)在等加速度上升的電梯中測得的慣性質量較小

[解答]：

$(A)(B)$

例題：

質量固定的物體受定力作用時，下列敘述何者正確？

(A)必做等加速度運動

(B)必沿直線運動

(C)速度恒與力同方向

(D)在相同時距內之速度變化量必相同

(E)在相同時距內之位移必相同

[解答]：

$(A)(D)$

例題：

一物體所受外力向量和為零，則此物體將可做

(A)等加速度運動 **(B)**靜止 **(C)**等速度運動

(D)拋物線運動 **(E)**等速率圓周運動

[解答]： **(B)(C)**

例題：

物體受力作用，其作用力的大小方向皆不變，其運動軌跡可能為

(A)直線 **(B)**拋物線 **(C)**圓

(D)橢圓 **(E)**螺旋線

[解答]： **(A)(B)**

例題：

利用天平量測物體質量時，下列何者正確？

(A)利用物體呈現靜力平衡時，力矩為零的原理

(B)在無重力的太空中也能測得

(C)在月球及地球上所得結果相同

(D)在等加速度上升的電梯中，所測得的物體重量與電梯靜止時所測得的結果相同

(E)在太空中加速上升的火箭也可測得

[解答]：

(A)(C)(D)(E)

例題：

下列有關牛頓運動定律的敘述，何者正確？

(A)使物體高速運動需要比低速運動更大的外力

(B)一對作用力與反作用力兩者同時產生，也同時消失

(C)作用力與反作用力由於大小相等、方向相反，因此永遠互相抵消，不會使互相作用的二物體運動狀態改變

(D)地球對蘋果的吸引力大於蘋果對地球的吸引力

(E)在定力作用下，當物體的加速度越大時，表示其質量也越小

[解答]：

(B)(E)

例題：

下列有關物體質量與重量的敘述何者為真？

(A)重量為向量，質量為非向量

(B)物體的重量隨所置放的地區而可能不同，但質量則不變

(C)物體不受外力的作用下，能做等速度運動，完全是因為有慣性的緣故

(D)所謂重量，就是地球引力

(E)質量與重量雖不同，但單位是一樣的

[解答]：

(*A*)(*B*)(*C*)

重量不一定是地球引力

例題：

下列有關物體重量與質量之敘述，何者正確？

(A)所謂重量就是地球對物體的萬有引力大小

(B)同一物體的重量會隨地點而變，但質量則否

(C)物體不受外力作用時，依然維持等速度運動，是慣性使然

(D) 重量是向量，而質量為純量

(E)質量雖與重量不同，但單位皆相同

[解答]：

(B)(C)(D)

例題：

一物體僅受一定方向之力作用，則此物體

(A)可做等速率運動

(B)若力為定值，則做等加速度運動

(C)可做曲線運動

(D)若初速為零，必做直線運動

(E)速度方向與力必相同

[解答]：

$(B)(C)(D)$

例題：

原來向北做等速運動之物體，突然受一向東之定力作用一段時間，則物體

(A)做變速度運動

(B)做等加速度運動

(C)軌跡為拋物線

(D) 加速度向西

(E)速度變化方向為北偏東

[解答]：

(A)(B)(C)

例題： 「牛頓第二運動定律實驗」中，實驗桌上放置滑車軌道，滑車連砝碼的質量共 m_1，桌下懸掛的砝碼質量為 m_2，下列敘述何者正確？

(A)當探討定質量時加速度與受力的關係：m_2 為操縱變因，m_1 為控制變因

(B)承(A)，此部分實驗不需要量出滑車質量

(C)當探討定力作用時加速度與質量的關係：m_2 為控制變因，m_1 為操縱因

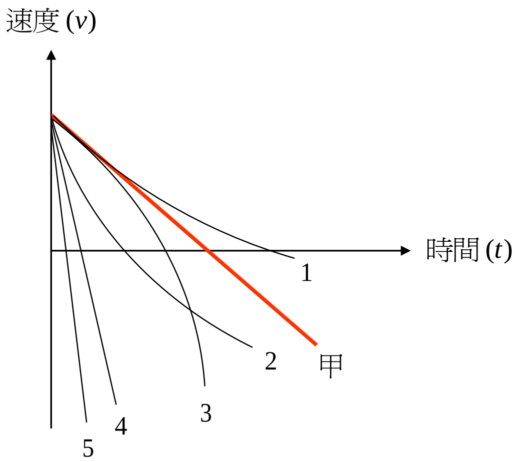
(D)承(C)，此部分實驗不需要量出滑車質量

(E)本實驗中必須用水平儀將滑車軌道調整至絕對水平，才能減少實驗誤差

[解答]： (B)(C)

例題：

將一球垂直上拋，然後落回地面。已知空氣阻力和球的瞬時速率成正比。在圖示的速度對時間關係曲線中，若甲直線為無空氣阻力時的理想狀況，則有空氣阻力時的真實狀況可能為哪一條？



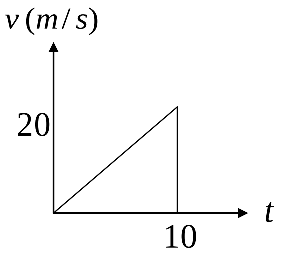
[解答]：

2

例題：

一汽車質量 1500 kg，由靜止啟動，經 10 sec 加速至 20 m/sec。設為等加速度運動，試求使汽車加速的力量為多少？

[解答]：



$$a=\frac{20}{10}=2\,(m/s^2)$$

$$F=ma=1500\times 2=3000\,(N)$$

例題：

四力同時作用於質量為 5 kg 的靜止物體上，若四力同在一與水平面平行的平面上，且其中三力分別為 10 牛頓(東偏南 37^0)、8 牛頓(正北)、15 牛頓(西偏南 53^0)，如欲使此物沿正南方進行，則第四力至少應為

(A)1 牛頓向東　(B) 1 牛頓向西　(C) 2 牛頓向東

(D) 2 牛頓向西　(E) 3 牛頓向東

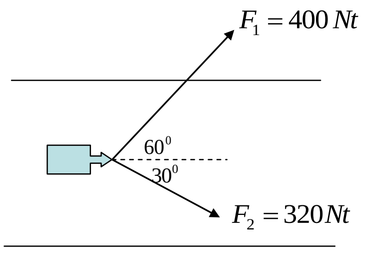
[解答]： (A)

$$(10\cos 37^0\vec{i}-10\sin 37^0\vec{j})+8\vec{j}+(-15\cos 53^0\vec{i}-15\sin 53^0\vec{j})+\vec{F_4}=-y\vec{j}$$

$$-\vec{i}-120\vec{j}+\vec{F_4}=-y\vec{j}\qquad y>0$$

$\vec{F_4}=\vec{i}+(120-y)\vec{j}$　當 $y=120$　$\vec{F_4}=\vec{i}$　此時 $|\vec{F_4}|=1$ 最小

例題：



兩個成人與一小孩沿運河拖拉某船，此兩成人之拉力分別為 F_1 與 F_2， F_1 與 F_2 之值及方向如圖所示。欲保持此船在運河中央行駛，此小孩需以何方向俾可用最小之力？又此最小力為何？

[解答]：

$$(400\cos60^0\vec{i}+400\sin60^0\vec{j})+(320\cos30^0\vec{i}-320\sin30^0\vec{j})+\vec{F}_3=x\vec{i}$$

$$(200\vec{i}+200\sqrt{3}\vec{j})+(160\sqrt{3}\vec{i}-160\vec{j})+\vec{F}_3=x\vec{i} \qquad x>0$$

$$\vec{F}_3=(x-200-160\sqrt{3})\vec{i}-(200\sqrt{3}-160)\vec{j}$$

當 $x=200+160\sqrt{3}$ $\quad\vec{F}_3=-(200\sqrt{3}-160)\vec{j}$ **此時** $|\vec{F}_3|$ **最小**

例題：

汽車以 72 km/hr 之速度行駛，煞車後滑行 10 m 而停止，$g=10\ m/s^2$，則

(A)輪胎與路面摩擦係數為 0.2

(B)輪胎與路面摩擦係數為 2

(C)若汽車載重增大，則滑行距離增大

(D)若汽車載重增大，則滑行距離減小

(E)若車速增為二倍，滑行距將增為四倍

[解答]：

(B)(E)

例題：

一質量 2 kg 的物體在光滑桌面上，以 3 m/s 的速度向東前進，當此物受到向南 6 牛頓及向東 2 牛頓之兩力同時作用 2 秒鐘，求

(1)自受力到 2 秒末，此物體的瞬時速度為若干？

(2) 2 秒末物體的位移為多少？

[解答]：

(1)由衝量 -動量原理　$m\vec{v}_1 + \vec{F}\Delta t = m\vec{v}_2$

$$2\times 3\vec{i} + (-6\vec{j} + 2\vec{i})\times 2 = 2\vec{v}_2$$

$$\vec{v}_2 = 5\vec{i} - 6\vec{j} \qquad |\vec{v}_2| = \sqrt{61}\ (m/s)$$

(2)由功能原理　$\frac{1}{2}mv_1^2 + \vec{F}\cdot\vec{S} = \frac{1}{2}mv_2^2$

水平方向：　$\frac{1}{2}\times 2\times 3^2 + (2\vec{i})\cdot\vec{S}_1 = \frac{1}{2}\times 2\times 5^2$　　$\vec{S}_1 = 8\vec{i}$

垂直方向：　$\frac{1}{2}\times 2\times 0^2 + (-6\vec{j})\cdot\vec{S}_2 = \frac{1}{2}\times 2\times(-6)^2$　　$\vec{S}_2 = -6\vec{j}$

$$S = \sqrt{|\vec{S}_1|^2 + |\vec{S}_2|^2} = 10$$

例題：

物體靜止置於光滑平面上，同時受兩個固定力作用，其中一力 40 牛頓向東，另一為 40 牛頓向東偏北 60^0 方向。若物體質量為 10 kg，在受力後 10 秒的瞬時速度大小為多少？

[解答]：

由衝量 -動量原理 $\quad m\vec{v}_1 + \vec{F}\Delta t = m\vec{v}_2$

$$10\times 0\vec{i} + (40\vec{i} + 40\cos 60^0\,\vec{i} + 40\sin 60^0\,\vec{j})\times 10 = 10\vec{v}_2$$

$$\vec{v}_2 = 60\vec{i} + 20\sqrt{3}\,\vec{j}$$

$$|\vec{v}_2| = \sqrt{60^2 + (20\sqrt{3})^2} = 40\sqrt{3}\ (m/s)$$

例題：

有一 3 Nt 之力和一 4 Nt 之力同時作用於 9 kg 的物體上，此二力作用時所相交的角度為 60^0。若此物體從靜止開始運動，3 秒後其速度為何？

[解答]：

由衝量 -動量原理 $\quad m\vec{v}_1 + \vec{F}\Delta t = m\vec{v}_2$

$$|\vec{F}| = \sqrt{3^2 + 4^2 - 2\times 3\times 4\times \cos 120^0} = \sqrt{37}$$

$$0 + |\vec{F}\Delta t| = |m\vec{v}_2|$$

$$\sqrt{37}\times 3 = 9|\vec{v}_2| \qquad |\vec{v}_2| = \frac{\sqrt{37}}{3}$$

例題：

(1)以 F 之定力分別作用於質量為 m_1 及 m_2 之兩靜止物體上，在沒有摩擦的情況下，若力的作用時間相同，則兩物所行的距離比 $d_1：d_2 = ?$

(2)以不同大小之力 F_1 及 F_2 作用於同樣在光滑水平面上做運動相同狀況之質量相同的物體上，使其運動相同距離後停止所需的時間各為 2 秒及 3 秒，則此二力比為多少？

[解答]：

(1) $|\vec{F}\Delta t| = |m\vec{v}|$ $\qquad |\vec{v}_1| : |\vec{v}_2| = \frac{1}{m_1} : \frac{1}{m_2}$

$$\vec{F}\cdot\vec{S} = \frac{1}{2}mv^2 \qquad d_1 : d_2 = \frac{1}{2}m_1\left(\frac{1}{m_1}\right)^2 : \frac{1}{2}m_2\left(\frac{1}{m_2}\right)^2 = \frac{1}{m_1} : \frac{1}{m_2} = m_2 : m_1$$

(2) $|\vec{F}\Delta t| = |m\vec{v}|$ $\qquad \frac{|\vec{F}_1\times 2|}{|\vec{F}_2\times 3|} = \frac{|m\vec{v}_1|}{|m\vec{v}_2|} \qquad \frac{|2\vec{F}_1|}{|3\vec{F}_2|} = \frac{|\vec{v}_1|}{|\vec{v}_2|}$

$$d_1 = d_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{1}{2}m|\vec{v}_1|^2}{|\vec{F}_1|} = \frac{\frac{1}{2}m|\vec{v}_2|^2}{|\vec{F}_2|} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{1}{2}m|2\vec{F}_1|^2}{|\vec{F}_1|} = \frac{\frac{1}{2}m|3\vec{F}_2|^2}{|\vec{F}_2|}$$

$$4|\vec{F}_1| = 9|\vec{F}_2| \qquad |\vec{F}_1| : |\vec{F}_2| = 9 : 4$$

例題：

氣球載有沙包 2 包時，以加速度 a 上升，載有沙包 6 包時，以加速度 a 下降。若氣球重量級沙包浮力不計，則

(1)欲使氣球不升降，應載多少包沙包？

(2)如果氣球僅載 1 包沙包時，則上升加速度為多少？

[解答]：

(1) 設沙包每包質量為 m，浮力為 B

$$\begin{cases} B-2mg=(2m)a \\ 6mg-B=(6m)a \end{cases} \qquad \begin{cases} B=3mg \\ a=\dfrac{g}{2} \end{cases}$$

欲使氣球不升降：應載 3 包沙包

(2) $B-mg=ma_1 \qquad a_1=2g$

例題：

一質量為 m 的氣球載有質量 M 的木塊，此時氣球與木塊正以等加速度 a 上升。若將木塊推下，則氣球上升的加速度為多少？

[解答]：

設浮力為 B $\qquad B-(m+M)g=(m+M)a$

$$B=(m+M)(a+g)$$

將木塊推下 $\qquad B-mg=ma_1$

$$a_1=a+\frac{M}{m}(a+g)$$

例題：

總質量 M 之氣球以向下 a 的加速度運動，拋出質量 m 的物體後，反而以向上 a 的加速度運動，若物體浮力不計，則 m = ?

[解答]：

設浮力為 B $\begin{cases} Mg - B = Ma \\ B - (M-m)g = (M-m)a \end{cases}$

$$m = \frac{2Ma}{g+a}$$

例題：

一機車交通手冊上記載當機車為 72 km/hr 時，正常的煞車距離為 40 公尺，跟車距離至少應為 48 公尺，請依上述資料計算 (g=10 m/s^2)

(1)機車輪胎與地面間的摩擦係數？

(2)一般人的反應時間為多少？

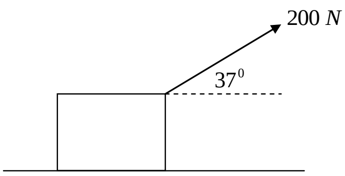
[解答]： $72\ km/hr = 72 \times \dfrac{1000}{60 \times 60}\ m/\sec = 20\ m/\sec$

(1) 由功能原理 $\dfrac{1}{2}mv_1^2 + \vec{F} \cdot \vec{S} = \dfrac{1}{2}mv_2^2$

$$\frac{1}{2}m \times 20^2 - (\mu_k mg) \times 40 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_k = 0.5$$

(2) $48 = 40 + 20t \quad \Rightarrow \quad t = 0.4\ (\sec)$

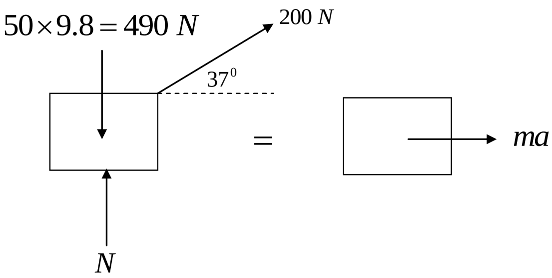
例題：



一木塊質量為 50 kg，以一繩拉之，使其在光滑平面上運動，繩與水平成 37^0 角，如圖。繩之張力 T 為 200 N。試求

(1)木塊的加速度　　**(2)**平面的支持力 N

[解答]：



(1) $200\cos 37^0 = 50a$

$a = 3.2\,(m/s^2)$

(2) $N + 200\sin 37^0 - 490 = 0$

$N = 370\,(N)$

例題：

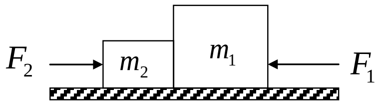
有一力，分別作用於 m_1 及 m_2，使產生 a_1 及 a_2 之加速度，若同一力作用於 m_1+m_2 上，則加速度為何？

[解答]：

$$F = m_1 a_1 = m_2 a_2$$

$$F = (m_1 + m_2)a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{F}{\frac{F}{a_1} + \frac{F}{a_2}} = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}$$

例題：



兩木塊質量分別為 m_1 及 m_2 ($m_1 > m_2$)，相互接觸於光滑桌面上，如圖所示。今同時以量值為 F_1 之水平力由右側推動 m_1，以量值為 F_2 之水平力由左側推動 m_2 ($F_1 > F_2$)，兩物體之加速度為 a，二物體間的作用力為 F。若 F_1、F_2 同時增加 ΔF

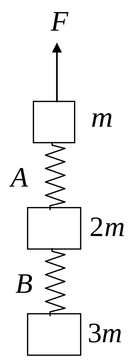
(A) a 變大、F 不變　　(B) a 不變、F 不變

(C) a 變大、F 變大　　(D) a 不變、F 變大

[解答]：

(D)

例題：



三塊質量不等的木塊，以兩條彈簧連接後，彈簧質量不計，在鉛直方向施一定力 F，使之向上做等加速度運動。已知彈簧 A、B 的力常數為 k 與 2k，則

(A)木塊組的加速度為 F/6m

(B)彈簧 A 的彈力為 5F/6

(C)彈簧 B 的彈力為 F/2

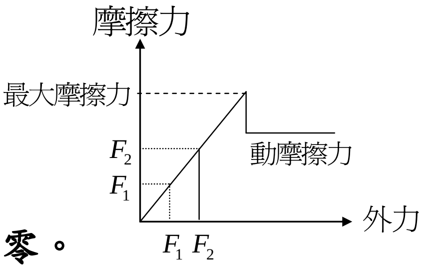
(D) A、B 兩彈簧的伸長量比為 10：3

[解答]：

(B)(C)(D)　　(A) $a = \dfrac{F}{6m} - g$

摩擦力

兩物體互相接觸，若兩者間有相對運動的趨勢時，接觸面間即存在靜摩擦力。

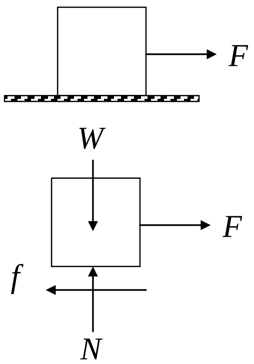


靜摩擦擦力：

置一物體於粗糙的平面上

1. 不施任何力於物體上，靜摩擦力等於零。
2. 水平施力 $\vec{F}_1$ 於物體，若物體不移動，則，靜摩擦力等於 $\vec{F}_1$
3. 若外力逐漸增大至 $\vec{F}_2$，而物體仍不移動，靜摩擦力也隨著增加至 $\vec{F}_2$
4. 若外力增大到某值，物體恰開始移動，此時摩擦力為最大，稱為最大靜摩擦力。

最大靜摩擦力公式

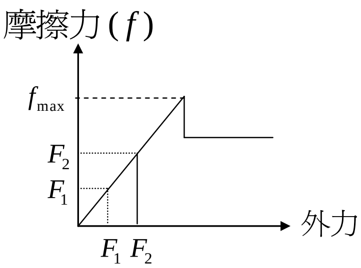


$$f_{\max} = \mu_s N$$

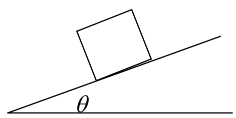
μ_s : 靜摩擦係數

N : 正向力

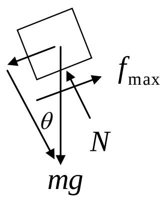
一般靜摩擦力 $\le \mu_s N$



靜摩擦係數的測定



物體置於斜面上，緩慢增加傾斜角 θ。當物體開始下滑時的 θ 角度



$$\begin{cases} mg\cos\theta = N \\ mg\sin\theta = \mu_s N \end{cases} \Rightarrow \quad \mu_s = \tan\theta$$

$$0 < \mu = \tan\theta < \infty$$

動靜摩擦力公式

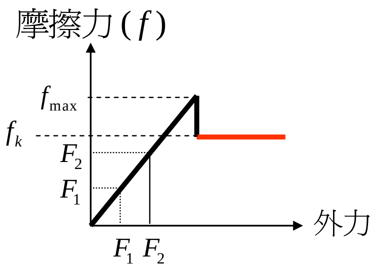
當物體滑動時，物體在接觸面上受大小固定的摩擦力作用，稱為摩擦力。動摩擦力小於最大靜摩擦力。

$f_k = \mu_k N$

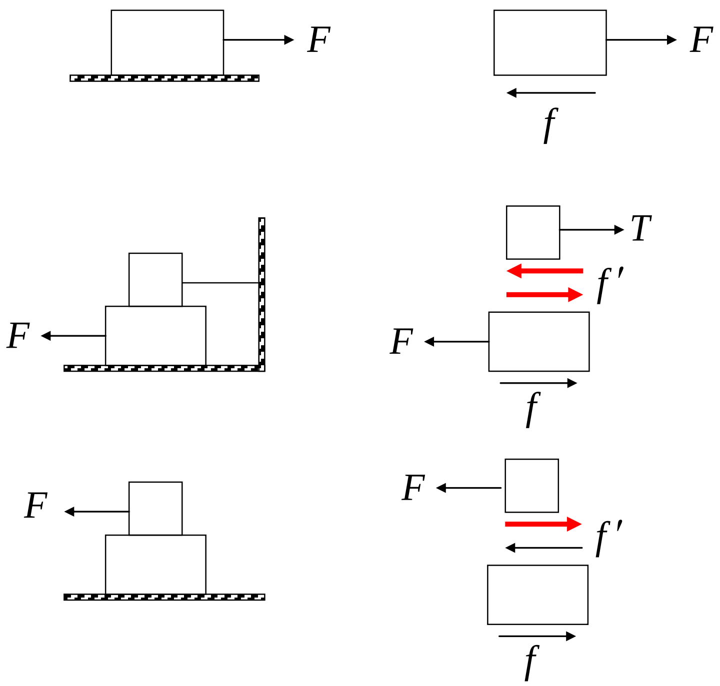
μ_k：動摩擦係數

N：正向力

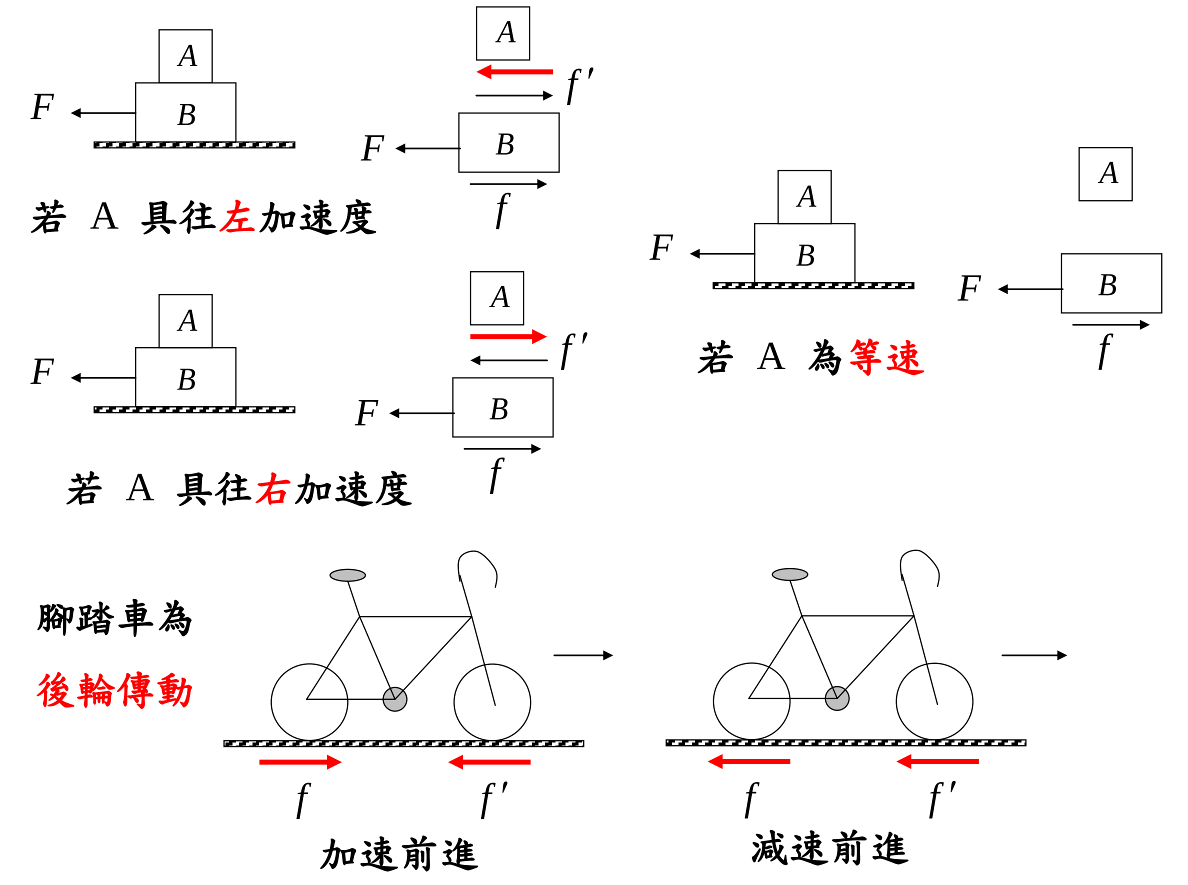
$\mu_k < \mu_s$

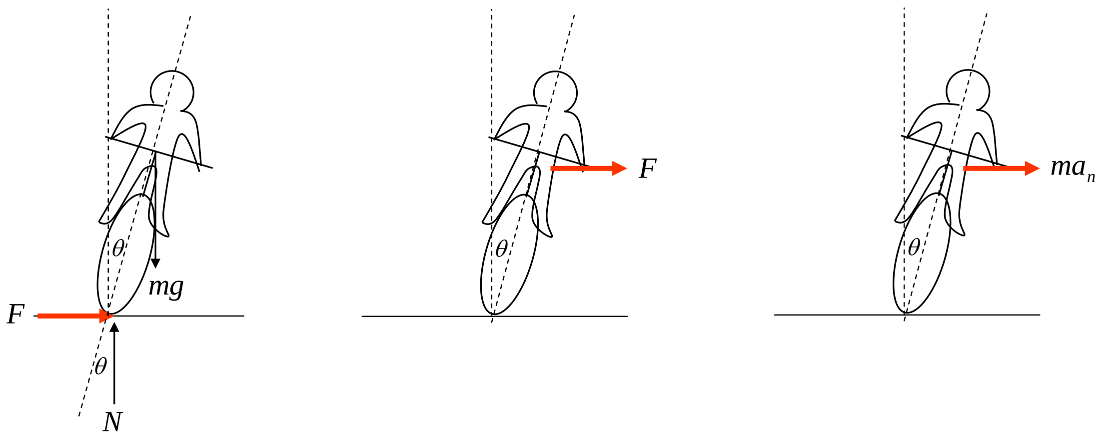


摩擦力方向

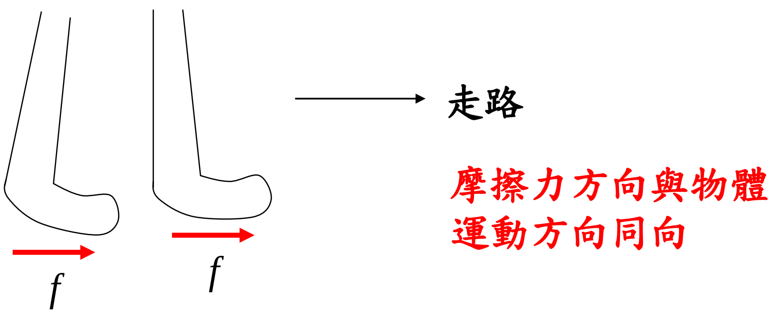


摩擦力方向與物體運動方向不一定相反





摩擦力方向與物體運動方向垂直，作為圓周運動的向心力。



例題：

在火車啟動及停止時，使整列火車加速或減速之淨力是靠哪些力？

(A)無論加速或減速，都是靠鐵軌上的摩擦力

(B)加速是靠火車頭對車廂之拉力，減速是靠鐵軌上的摩擦力

(C)加速是靠鐵軌上的摩擦力，減速是靠火車頭對車廂之阻擋力

(D)加速是靠火車頭對車廂之拉力，減速是靠火車頭對車廂之阻擋力

[解答]：

(A)

例題：

下列哪一種方法可以減少摩擦力？

(A)減少正壓力

(B)採用摩擦係數較小的物質

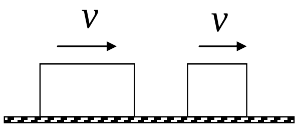
(C)加潤滑油於接觸面

(D)將接觸面磨光

[解答]：

(A)(B)(C)(D)

例題：



兩個相同質料但不同大小的木塊，在同一粗糙的水平面上，以相同的初速 v 滑出，如圖所示。則

(A)大、小兩木塊具有相同的加速度

(B)大、小兩木塊間的距離逐漸增加

(C)大、小兩木塊間的距離逐漸減少

(D)大、小兩木塊所受的正向力相等

(E)大、小兩木塊所受的合力相同

[解答]：

(A)

例題：

欲使一木塊靠在臺車前方不下落，下列哪一種情況為正確？

(A)若木塊與臺車的接觸面為光滑時，臺車做加速度運動，就能使木塊不落地

(B)若木塊與臺車的接觸面為光滑時，只要臺車的速度夠快，就能使木塊不落地

(C)若木塊與臺車的接觸面為光滑時，只要臺車的加速度夠大，就能使木塊不落地

(D)若木塊與臺車的接觸面有摩擦時，只要臺車做加速度運動，就能使木塊不落地

(E)若木塊與臺車的接觸面有摩擦時，只要臺車的加速度夠大就能使木塊不落地

[解答]： (E)

例題：

下列有關摩擦力的敘述何者正確？

(A)摩擦力對物體恆做負功

(B)摩擦力恆與物體的運動方向相反

(C)物體尚未移動前，不受摩擦力作用

(D)兩接觸面間之靜摩擦係數不一定小於 1

(E)人行走於地面上的摩擦力為靜摩擦力且方向向前

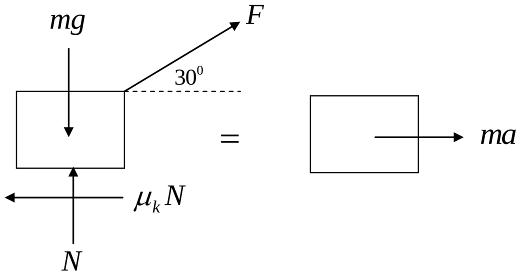
[解答]：

(D)(E)

例題：

一物體 m 在水平桌面上以一力 F (與水平成 30^0 之仰角) 拉之使其運動，若此物體與桌面的動摩擦係數為 μ_k，求此物體的加速度？

[解答]：

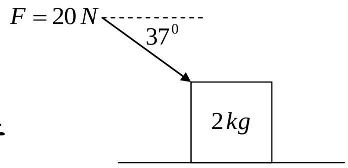


$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \\ \sum F_x = ma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F\sin 30^0 - mg + N = 0 \\ F\cos 30^0 - \mu_k N = ma \end{cases}$$

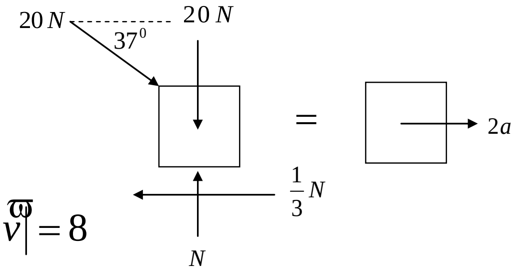
$$a = \frac{\sqrt{3}+\mu_k}{2}\frac{F}{m} - \mu_k g$$

例題：

圖中物體質量 2 kg，接觸面間動摩擦係數為 1/3，g=10 m/s^2，則物體由靜止受斜向俯角 37^0 之定力 20 N，作用 30 秒之位移為多少？



[解答]： $\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; -20\sin 37^0 - 20 + N = 0$



$$N = 32$$

由衝量 -動量原理 $m\vec{v}_1 + \vec{F}\Delta t = m\vec{v}_2$

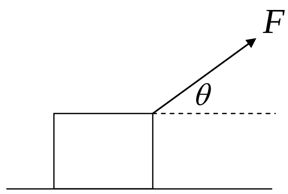
$$0 + (20\cos 37^0 - \frac{1}{3}N) \times 30 = 2|\vec{v}| \;\Rightarrow\; |\vec{v}| = 8$$

由功能原理 $\frac{1}{2}mv_1^2 + \vec{F}\cdot\vec{S} = \frac{1}{2}mv_2^2$

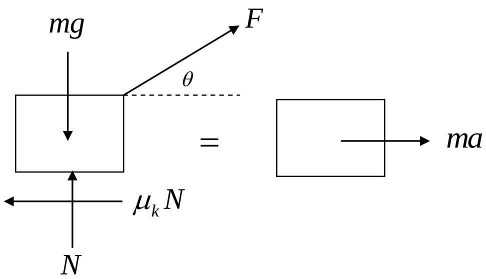
$$(20\cos 37^0 - \frac{1}{3}N)S = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 \qquad S = 12\,(m)$$

例題：

一物體置於水平面上，其質量為 m，物體與平面之間的摩擦係數為 μ。若施力的方向可以調整(即可改變 θ)，欲使該物體能在水平方向上運動，所需的最小力 F 為多少？



[解答]：



$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \\ \sum F_x = ma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F\sin\theta - mg + N = 0 \\ F\cos\theta - \mu_k N = ma \end{cases}$$

$$a = (\cos\theta + \mu_k \sin\theta)\frac{F}{m} - \mu_k g \ge 0 \qquad F \ge \frac{m\mu_k g}{\cos\theta + \mu_k \sin\theta}$$

$$\because\; \cos\theta + \mu_k\sin\theta = \sqrt{1+\mu_k^2}\,(\cos\theta\frac{1}{\sqrt{1+\mu_k^2}} + \sin\theta\frac{\mu_k}{\sqrt{1+\mu_k^2}}) = \sqrt{1+\mu_k^2}\cos(\theta-\alpha)$$

當 $\theta = \alpha = \cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{1+\mu_k^2}})$ **，** $\cos\theta + \mu_k\sin\theta$ **為最大，** $F_{\min} = \frac{m\mu_k g}{\sqrt{1+\mu_k^2}}$

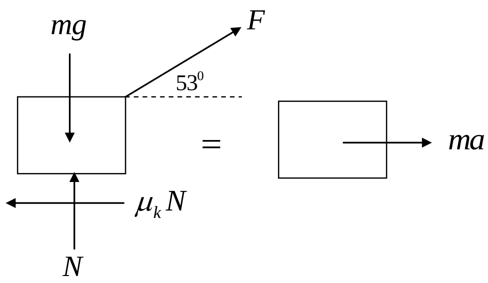
例題：

質量為 2 kg 的物體靜止於平地上，物體與平地間的動摩擦係數為 0.5，靜摩擦係數為 0.6，g=10 m/s^2，今施力 20 N 以仰角 53^0 拉此物體，則

(A)物體移動時加速度大小為多少？

(B)今只增加拉力的大小，則物體在平面上移動的加速度最大為多少？

[解答]：



(A) $\begin{cases} \sum F_y = 0 \\ \sum F_x = ma \end{cases}$

$$\begin{cases} 20\sin 53^0 - 2\times 10 + N = 0 \\ 20\cos 53^0 - 0.6N = ma \end{cases} \Rightarrow \quad a = 5\,(m/s^2)$$

(B) $\begin{cases} \sum F_y = 0 \\ \sum F_x = ma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F\sin 53^0 - mg + N = 0 \\ F\cos 53^0 - \mu_k N = ma \end{cases}$

$$a = (\cos 53^0 + \mu_k \sin 53^0)\frac{F}{m} - \mu_k g$$

因物體在平面上，條件為 $N = mg - F\sin 53^0 \geq 0$ $F \leq 1.25mg$

當 $F = 1.25mg$ 時， $a_{\max} = 0.75g = 7.5\,(m/s^2)$

例題：

一物體滑下 45^0 的粗糙斜面，所經時間為滑下 45^0 光滑斜面的二倍。設下滑長度相同，求物體與粗糙斜面間的動摩擦係數？

[解答]：

$$S=\frac{1}{2}(g\sin 45^0)t^2=\frac{1}{2}(g\sin 45^0-\mu g\cos 45^0)(2t)^2$$

$$\sin 45^0=4(\sin 45^0-\mu\cos 45^0)$$

$$4\mu\cos 45^0=3\sin 45^0$$

$$\mu=\frac{3}{4}$$

例題：

一物體自靜止滑下 37^0 的粗糙斜面所經時間，為滑下 37^0 的光滑斜面的 $\sqrt{2}$ 倍。設下滑長度相同，則物體與粗糙斜面間的動摩擦係數為多少？

[解答]：

$$S=\frac{1}{2}(g\sin 37^0)t^2=\frac{1}{2}(g\sin 37^0-\mu g\cos 37^0)(\sqrt{2}t)^2$$

$$\sin 37^0=2(\sin 37^0-\mu\cos 37^0)$$

$$2\mu\cos 37^0=\sin 37^0$$

$$\mu=\frac{3}{8}$$

例題：

設重力加速度為 10 m/s²，路上有一小貨車 50 公斤重，載有一箱飲料 5 公斤重，此箱與車地板的靜摩擦係數為 0.5。若貨車以 15 m/s 的速率行駛，剎車時，為不使箱滑動，則貨車的最短剎車距離為多遠？

[解答]：

以能量觀點，考慮飲料箱

$$\underbrace{\frac{1}{2}\times5\times15^2}_{動能}-\underbrace{0.5\times(5g)S}_{摩擦力}=\underbrace{0}_{動能}$$

$$S=22.5\,(m)$$

例題：

一物體與木板間靜摩擦係數為 3/4，動摩擦係數為 1/4。

若將木板逐漸傾斜

(1)傾斜角為若干時，物體即將開始下滑？

(2)下滑之加速度為多少

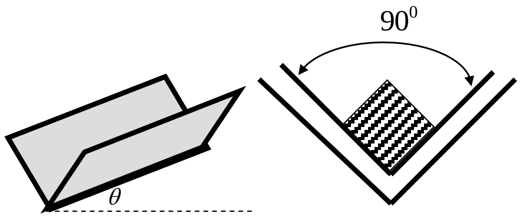
[解答]：

(1) $\mu_s=\tan\theta \qquad \frac{3}{4}=\tan\theta \;\Rightarrow\; \theta=37^0$

(2) $mg\sin37^0-\mu_k mg\cos37^0=ma$

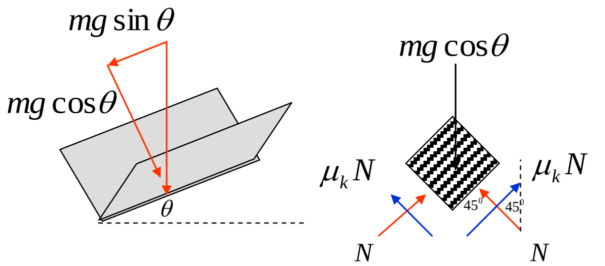
$$a=\frac{3}{5}g-\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}g=\frac{2}{5}g$$

例題：



如圖，質量為 m 的木塊在一傾斜 θ 之直角槽內滑行，若槽與木塊間之動摩擦係數 μ_k，求木塊之加速度為何？

[解答]：



$$(2N)\cos 45^0 - mg\cos\theta = 0$$

$$N = \frac{mg\cos\theta}{2\cos 45^0} = \frac{\sqrt{2}}{2}mg\cos\theta$$

$$mg\sin\theta - 2\mu_k N = ma \quad \Rightarrow \quad mg\sin\theta - 2\mu_k\frac{\sqrt{2}}{2}mg\cos\theta = ma$$

$$a = g(\sin\theta - \sqrt{2}\mu_k\cos\theta)$$

例題：

物體沿摩擦係數 μ=0.5，斜角為 37^0 的斜面自下方以 10 m/s 初速上滑，g=10 m/s^2，下列何者正確？

(A)上滑時減速度為 10 m/s^2

(B)下滑時加速度為 2 m/s^2

(C)上滑最大位移為 5 m

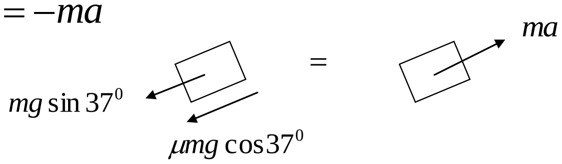
(D)下滑回到起點的速率小於 10 m/s

(E)上滑時間與下滑時間比為 1:1

[解答]： **(A)(B)(C)(D)**

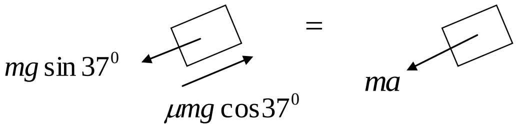
(A) $mg\sin 37^0 + 0.5mg\cos 37^0 = -ma$

$a = -10\,(m/s^2)$



(B) $mg\sin 37^0 - 0.5mg\cos 37^0 = ma$

$a = 2\,(m/s^2)$



(C)以能量觀點

$$\underbrace{\frac{1}{2}\times m\times 10^2}_{動能} + \underbrace{0}_{位能} - \underbrace{0.5mg\cos 37^0 S}_{摩擦力} = \underbrace{0}_{動能} + \underbrace{mgS\sin 37^0}_{位能}$$

$$S = 5\,(m)$$

(D) $$\underbrace{0}_{動能} + \underbrace{mg(5\sin 37^0)}_{位能} - \underbrace{0.5mg\cos 37^0\times 5}_{摩擦力} = \underbrace{\frac{1}{2}\times m\times v^2}_{動能} + \underbrace{0}_{位能}$$

$$v = 2\sqrt{5}\,(m/s)$$

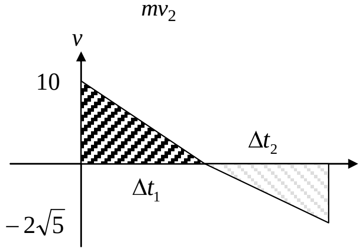
(E)由衝量－動量原理

上滑 $$\underbrace{m\times 10}_{mv_1} - \underbrace{(mg\sin 37^0 + 0.5mg\cos 37^0)\Delta t_1}_{F\Delta t} = \underbrace{0}_{mv_2}$$

$$\Delta t_1 = 1\,(\text{sec})$$

下滑 $$\underbrace{0}_{mv_1} + \underbrace{(mg\sin 37^0 - 0.5mg\cos 37^0)\Delta t_2}_{F\Delta t} = \underbrace{m\times 2\sqrt{5}}_{mv_2}$$

$$\Delta t_2 = \sqrt{5}\,(\text{sec})$$



例題：

(1)一物體以 9.8 m/s 的初速，地面沿仰角 30^0 的光滑斜面向上運動。此物體所能達到的最高高度為多少？

(2)同上題，若斜面有摩擦，而摩擦係數為 $\frac{1}{\sqrt{3}}$，則物體所能達到的最高高度為多少？

[解答]：

(1) 以能量觀點 $\underbrace{\frac{1}{2}\times m\times 9.8^2}_{動能} + \underbrace{0}_{位能} = \underbrace{0}_{動能} + \underbrace{mgh}_{位能}$ $\qquad h = 4.9\,(m)$

(2) $\underbrace{\frac{1}{2}\times m\times 9.8^2}_{動能} + \underbrace{0}_{位能} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}mg\cos 30^0}_{摩擦力}\frac{h}{\sin 30^0} = \underbrace{0}_{動能} + \underbrace{mgh}_{位能}$

$$h = 2.45\,(m)$$

例題：

物體在斜面下方以 10 m/s 的初速上滑，下列敘述何者正確？

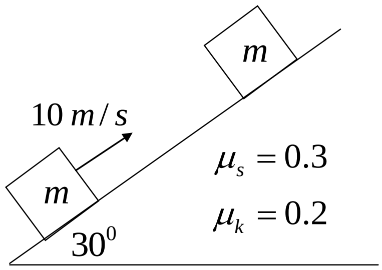
(A)上滑最大位移為 7.5 m

(B)到達頂點時仍會下滑

(C)上滑歷時較下滑歷時短

(D)上滑之加速度大於下滑之加速度

(E)下滑之末速小於上滑之初速



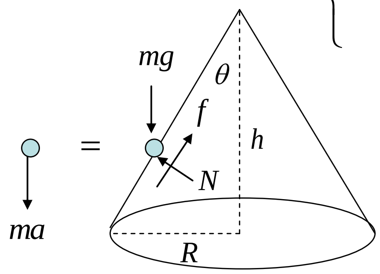
[解答]：

(A)(B)(C)(D)(E)

例題：

設一地板為圓形(半徑為 R)的電梯，以加速度 a(a＜g)下降，設電梯地板上有堆有砂堆，且每顆砂粒之質量為 m，砂粒間彼此的靜摩擦係數為 μ_s。若不要任何砂粒滑出地板外，則地板上所堆起的砂堆最高高度為何？砂粒摩擦力為何？

[解答]：



$$\begin{cases} f\sin\theta = N\cos\theta \\ f \le \mu_s N \end{cases} \Rightarrow \mu_s \ge \cot\theta \Rightarrow \theta \le \cot^{-1}\mu_s$$

最高高度： $h = R\cot\theta = \mu_s R$

$$mg - f\cos\theta - N\sin\theta = ma$$

$$f = (g-a)m\cos\theta = (g-a)m\frac{1}{\sqrt{\mu_s^2+1}}$$

例題：

一斜面長為 L，與水平面夾角為 θ。一物自靜止滑下該斜面(摩擦係數為 μ)，費時為 t。但若沒有摩擦，則只需時間 t_0 (t_0<t) 即可。下列敘述何者不正確？

(A)沒有摩擦時，該物的加速度為 $g\sin\theta$

(B)有摩擦時，該物的加速度為 $g(\sin\theta - \mu\cos\theta)$

(C) $t_0 = \sqrt{\dfrac{2L}{g\sin\theta}}$　　(D) $\dfrac{t_0}{t} = \sqrt{1-\mu\cot\theta}$

(E)摩擦係數 $\mu = (1-\dfrac{t_0^2}{t^2})\cot\theta$

[解答]：

(E)

例題：

一木塊置於斜角為 30^0 之斜面上，恰可等速滑下。今以初速 v 令木塊自斜面底端沿斜面上滑，則滑行至最大高度所需時間為多少？

[解答]：

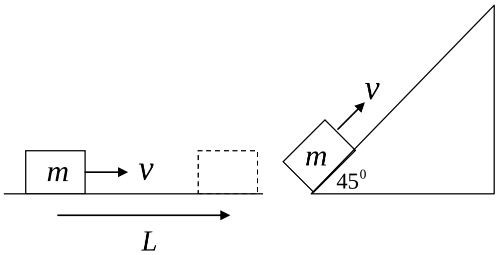
$$mg\sin 30^0 - f = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0.5mg$$

$$mv - (mg\sin 30^0 + f)\Delta t = 0$$

$$\Delta t = \frac{v}{g}$$

例題：

如圖所示，m 以 v 的速度在水平木板上滑行 L 後停止。



今將木板一端抬高使與地面成 45^0 角，再同樣以 v 的初速往上滑，則可滑行多遠？（m 和木板之間的動摩擦係數為 μ）

[解答]：

以能量觀點

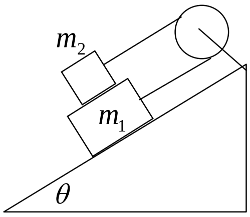
$$\underbrace{\frac{1}{2}\times m\times v^2}_{動能} - \underbrace{\mu mg}_{摩擦力} L = \underbrace{0}_{動能}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{動能} + \underbrace{0}_{位能} - \underbrace{\mu mg\cos 45^0 S}_{摩擦力} = \underbrace{0}_{動能} + \underbrace{mgS\sin 45^0}_{位能}$$

$$S = \frac{\sqrt{2}\mu L}{\mu + 1}$$

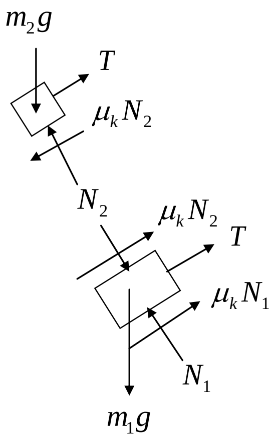
例題：

如圖，設 m_1、m_2 與斜面之間的動摩擦係數均相同，且 m_2 可沿斜面等速下滑。則接觸面間之動摩擦係數為何？



[解答]：

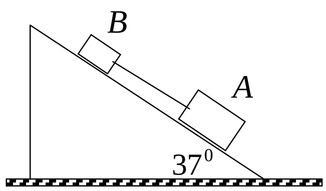
$$\begin{cases} N_2 = m_2 g\cos\theta \\ N_1 = (m_1+m_2)g\cos\theta \\ T - \mu_k N_2 - m_2 g\sin\theta = 0 \\ T + \mu_k N_1 + \mu_k N_2 - m_1 g\sin\theta = 0 \end{cases}$$



$$\mu_k = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + 3m_2}\tan\theta$$

例題： $g = 10\,(m/s^2)$

如圖所示，A 的質量為 10 公斤，B 的質量為 5 公斤，兩者與斜面間的動摩擦係數分別為 0.1 與 0.2，兩者間以一細繩連接。則繩子的張力為若干？



[解答]：

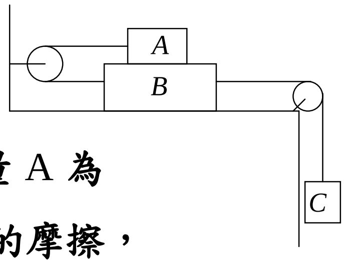
$$10g\sin 37^0 + 5g\sin 37^0 - 0.1\times 10g\cos 37^0 - 0.2\times 5g\cos 37^0 = (10+5)a$$

$$a = \frac{74}{15}$$

$$10g\sin 37^0 - 0.1\times 10g\cos 37^0 - T = 10a$$

$$T = \frac{8}{3}\,(N)$$

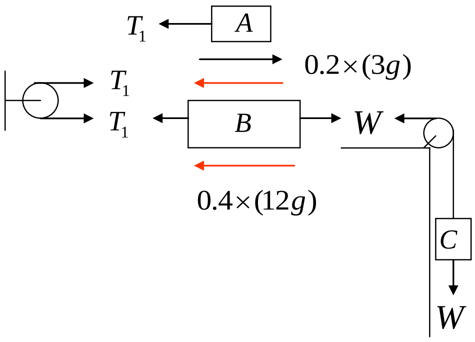
例題：



如圖所示，連接體 A、B 間靜摩擦係數為 0.2，B 與平面間靜摩擦係數為 0.4。若質量 A 為 3 公斤、質量 B 為 9 公斤，不計滑輪與繩的摩擦，則 C 之重量最小值為多少，才能拉動此連接體？

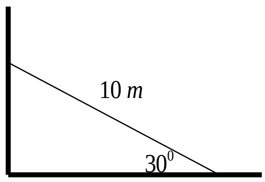
[解答]：

$$\begin{cases} -T_1 + 0.2\times(3g) = 0 \\ W - 0.2\times(3g) - 0.4\times(12g) - T_1 = 0 \end{cases}$$



$$W = 6g$$

例題：



如圖，有一溜滑梯為 μ_k=0.2 的斜面所製成，總長 10 m。若體重為 50 kg 的小華和體重 30 kg 的小明，各從斜面頂由靜止滑下，請問哪一個人較快著地？(g=10 m/s^2)

[解答]：

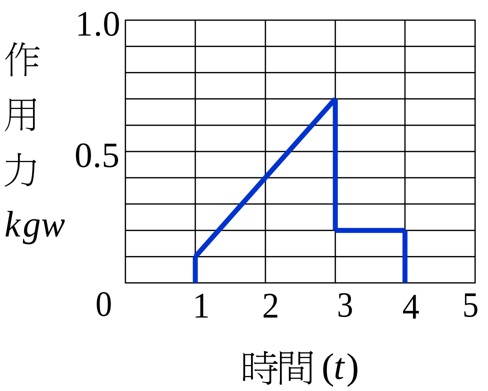
$$\underbrace{0}_{動能} + \underbrace{mg(10\sin 30^0)}_{位能} - \underbrace{0.2mg\cos 30^0 \times 10}_{摩擦力} = \underbrace{\frac{1}{2}\times m\times v_1^2}_{動能} + \underbrace{0}_{位能}$$

$$0 + (mg\sin 30^0 - 0.2mg\cos 30^0)\Delta t_1 = mv_1$$

由上兩式中發現 m 皆消去，表示所花時間與質量無關。

例題：

重一千克的物體停放在有摩擦的平面上，如此物體和桌面間靜摩擦係數為 0.5，動摩擦係數為 0.2。用一水平力推此物體，並且此力大小變化如圖所示，請問



(1) 0.5 秒時摩擦力為多少？

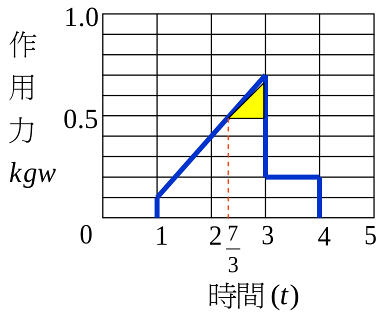
(2) 2 秒時摩擦力為多少？

(3) 3.5 秒時摩擦力、加速度及速度為多少？

(4)物體在 4.5 秒的瞬時加速度為多少？

[解答]： $f_{\max} = \mu_s mg = 0.5 \times 1 = 0.5\,(kgw)$

$f_k = \mu_k mg = 0.2 \times 1 = 0.2\,(kgw)$



(1) $f = 0$　　**(2)** $f = 0.4\,(kgw)$

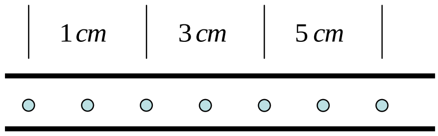
(3)因 3 秒時施力 $0.7 > f_{\max} = 0.5$，表示物體已運動。 $f = 0.2\,(kgw)$

在第 3 秒時的加速度為 $a = (\dfrac{0.7-0.2}{1}) \times 9.8 = 4.9\,(m/s^2)$

在第 3.5 秒時的加速度為 $a = (\dfrac{0.2-0.2}{1}) \times 9.8 = 0\,(m/s^2)$

由衝量-動量原理： $0 + \dfrac{(0.7-0.5)\times(3-\frac{7}{3})}{2} = 1 \times v$　　$v = \dfrac{1}{15}\,(m/s)$

(4) 在第 3.5 秒時的加速度為 $a = (\dfrac{0-0.2}{1}) \times 9.8 = -1.96\,(m/s^2)$



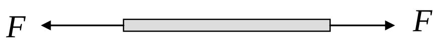
例題：

在牛頓第二運動定律的實驗中，若輕繩與定滑輪之摩擦可忽略不計，測得計時器振動頻率為 20 次/秒。又紙帶數據如圖所示。若滑車與桌面之摩擦力為一定值，且滑車及砝碼質量各為 6 公斤及 3 公斤。則滑車與桌面之動摩擦係數為何？

[解答]：

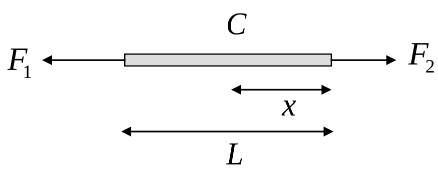
輕、重繩所受拉力

輕繩： 繩子的質量可忽略不計



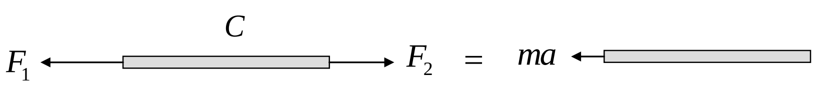
繩上任一處的張力大小皆為 F 。

重繩： 繩子的質量需考慮

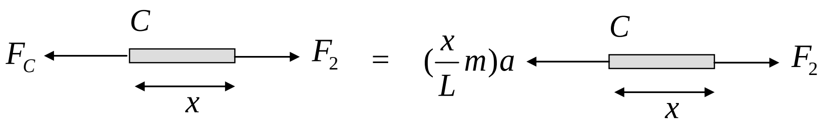


若 $F_1 > F_2$，繩子質量為 m，

繩子的加速度為 a



$F_1 - F_2 = ma$



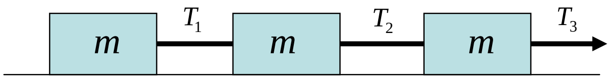
距 F_2 位置 x 處 C 點繩子的張力 F_C 為 $F_C - F_2 = \dfrac{x}{L}ma$

例題：

三木塊質量均為 m 以細繩串聯，受拉力而向右做等加速度運動。設各木塊與桌面摩擦係數均相同，細繩質量可忽略不計，則

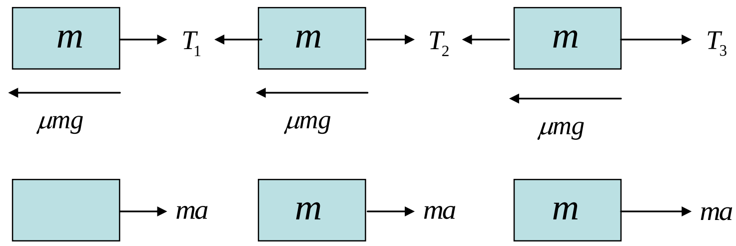
(1)三物體所受張力比？

(2)三物體所受合力比？



[解答]：

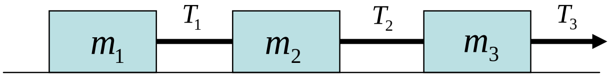
(1)



$$\begin{cases} T_1 - \mu mg = ma \\ T_2 - T_1 - \mu mg = ma \\ T_3 - T_2 - T_1 - \mu mg = ma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = m(a+\mu g) \\ T_2 = 2m(a+\mu g) \\ T_3 = 3m(a+\mu g) \end{cases} \qquad T_1 : T_2 : T_3 = 1:2:3$$

(2) $ma : ma : ma = 1:1:1$

例題：



如圖所示，以三條輕繩連接在光滑水平桌面上之三木塊($m_1 = 4$ kg，$m_2 = 2$ kg ，$m_3 = 2$ kg)，今以 T_3 之力向右拉，使各木塊得一相同的加速度 a ，如以 T_2、T_1 表示圖中所示繩上的張力，則 $T_3:T_2:T_1$ =?

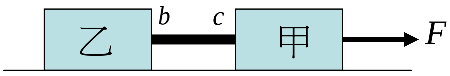
[解答]： $T_3 : T_2 : T_1 = 4:3:2$

例題：

一重繩(質料均勻)平放在光滑地面上，兩端各施以 200 牛頓與 120 牛頓之水平力，則距受力 200 牛頓之一端全長 ¼ 處的張力為何？

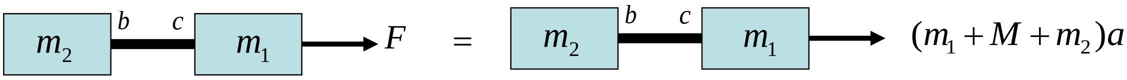
[解答]： 140 牛頓

例題：

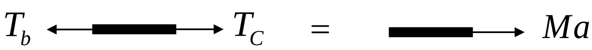


如圖，甲、乙兩木塊置於光滑的水平面上以繩連接。若甲、乙兩木塊的質量分別為 m_1 及 m_2，繩子的質量為 M，而在甲木塊上施一水平力 F，則 b、c 兩點間張力差為多少？

[解答]：



$$F = (m_1 + M + m_2)a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F}{m_1 + M + m_2}$$

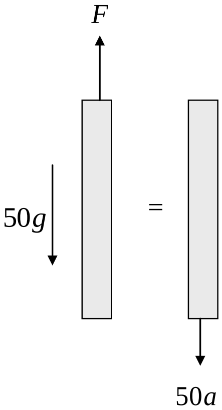


$$T_C - T_b = Ma = \frac{MF}{m_1 + M + m_2}$$

例題：

重 50 kg 的物體用繩自屋頂放下，繩的斷裂耐度為 43.5 公斤重，欲使繩不斷，應如何放法？

[解答]：



$$50g - F = 50a \quad \Rightarrow \quad F = 50g - 50a$$

$$F = 50g - 50a \le 43.5g$$

$$a \ge \frac{6.5g}{50}\ (m/s^2)$$

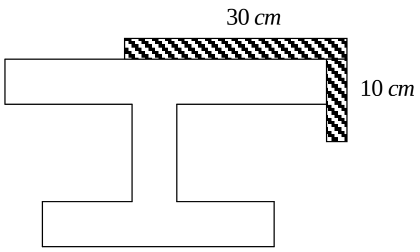
繩才不致於不斷

例題：

均勻細繩長 40 cm，靜置於光滑水平桌面上，有 10 cm 垂下，用手固定。若繩重 4 kg，當放手後，下垂部分長為 30 cm 的瞬間

(1)繩子的瞬時加速度為多少？**(**g=10 m/s^2**)**

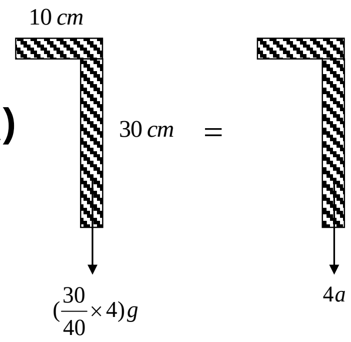
(2)繩子中點**(**離繩子底端 20 cm**)**處之張力為多少？



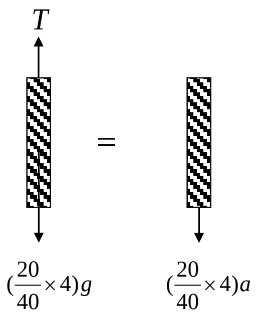
[解答]：

(1)設整條繩子的加速度為 a (非質心加速度)

$$\left(\frac{30}{40}\times 4\right)g = 4a \quad \Rightarrow \quad a=\frac{3}{4}g\ (m/s^2)$$



(2)



$$\frac{20}{40}\times 4g - T = \frac{20}{40}\times 4a \quad \Rightarrow \quad a=\frac{1}{2}g\ (m/s^2)$$

例題：

質量 2 kg 之繩子放在水平光滑桌面上。在其兩端各施力 10 kgw 拉之，則繩之中點張力為多少？

[解答]：

$$10\ (kgw)$$

例題：

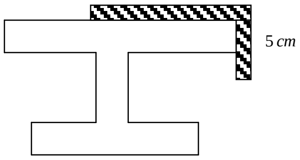
有一每公尺質量為 m 的均勻細繩，自一端向上提起，加速度為 a，則距繩子下端 x 公尺處之張力大小為多少？

[解答]：

$$xm(g+a)$$

例題：

長 20 cm 之均勻粗繩質量為 2 kg，靜置於光滑水平桌面上，有 5 cm 長沿桌子邊緣鉛直下垂，釋放後



(A)起初，粗繩的加速度值為 2.5 m/s^2

(B)起初，在桌子邊緣處，粗繩的張力為 5 N

(C)當下垂的長度為 15 cm 時，粗繩的加速度為 7.5 m/s^2

(D)當下垂的長度為 15 cm 時，粗繩的中點張力為 2.5 N

(E)當繩子完全離開桌面，粗繩的中點張力為 0

[解答]：

(A)(C)(D)(E)

例題：

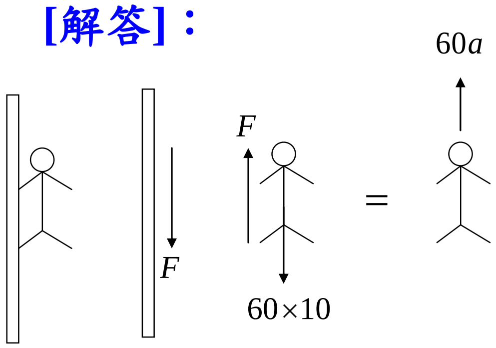
有一竹竿其最大支持能力為 900 N，今有一質量為 60 kg 的運動員沿竿向上做爬竿運動。當人往上爬時，下列何種情況竹竿不會斷裂？($g=10\ m/s^2$)

(A)往上 8 m/s^2　　(B)往上 6 m/s^2

(C)往上 6 m/s^2　　(D)往上 3 m/s^2

(E)等速往上

[解答]：

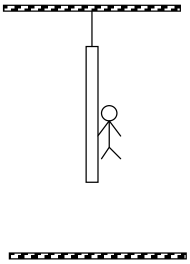


$$F-60\times10=60a \quad\Rightarrow\quad F=600+60a$$

$$F=600+60a\le 900 \quad\Rightarrow\quad a\le 5\,(m/s^2)$$

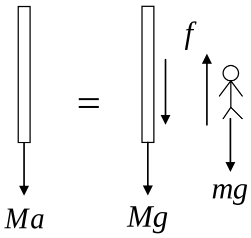
(C)(D)(E)

例題：



一質量 m 的人自地面躍起並抓住垂掛在天花板下的均質長木桿。已知木桿質量為 M 且夠長，如圖所示。當人捉住木桿瞬間，懸線斷裂，若人持續沿木桿上爬，恰使人離地面高度不變。在木桿落地和人離開木桿之前，設木桿均保持鉛直狀態，則此段時間內木桿下落的加速度為何？

[解答]：

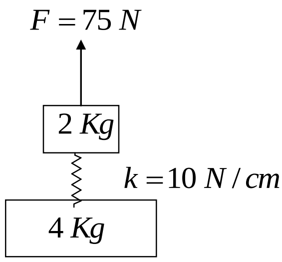


人離地面高度不變，表示無加速度

$$\begin{cases} f = mg \\ f + Mg = Ma \end{cases} \Rightarrow a = \frac{(M+m)}{M} g$$

例題：

如圖，以一拉力 F=75 牛頓垂直向上拉 2 kg 的物體，且連結於 2 kg 和 4 kg 物體之彈簧彈力常數為 k=10 N/cm，g=10 m/s^2，則

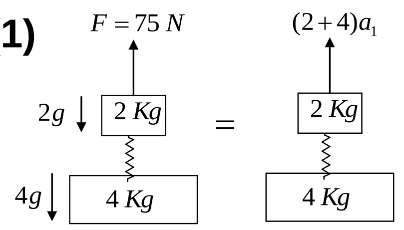


(1)彈簧伸長量？

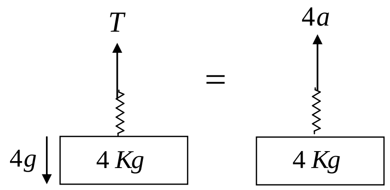
(2)將拉力 F 取消瞬間，2 kg 的物體其加速度為多少？

[解答]：

(1)



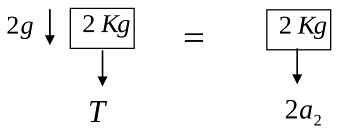
$$75-2g-4g=(2+4)a_1 \quad\Rightarrow\quad a=\frac{5}{2}$$



$$T-4g=4a_1 \quad\Rightarrow\quad T=50$$

$$T=50=kx \quad\Rightarrow\quad x=5\,(cm)$$

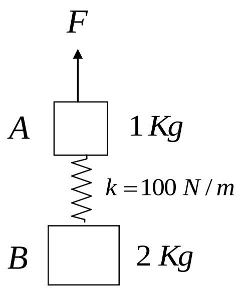
(2)



$$T+2g=2a_2 \quad\Rightarrow\quad a_2=35\,(m/s^2)$$

例題：

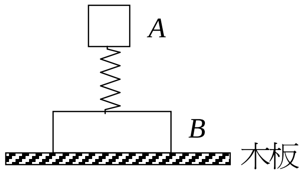
如圖，質量 1 kg、2 kg 的 A、B 兩物，其間繫 k=100 N/m 的輕彈簧，以一力 F=36 N 向上作用於 A 時，彈簧伸長量為多少？



[解答]：

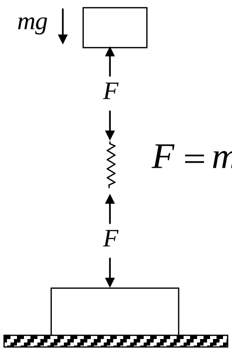
$$24\,cm$$

例題：

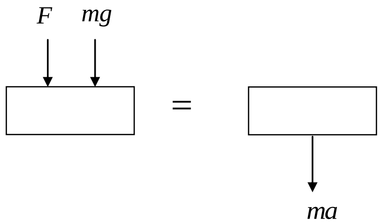


一塊木板上托著兩塊中間夾有彈簧的 A、B 兩木塊，如圖所示。兩木塊質量相等並處於平衡狀態。現在突然把木板撤去，在這一瞬間，位在下方的 B 木塊其加速度為何？

[解答]：



$$F = mg$$



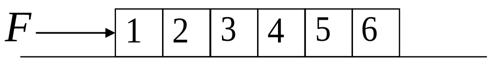
$$mg + F = ma \quad \Rightarrow \quad a = 2g$$

例題：

六個相同的木塊，每個質量為一公斤，置放於光滑的水平桌面上。以 12 牛頓的力 F 水平的作用在第一塊木塊上，其方向如圖所示。

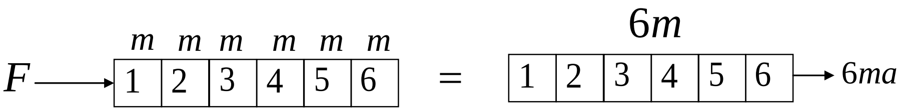
(1)求每一塊木塊所受合力的量值

(2)第四塊木塊作用在第五塊的力是多少？



[解答]：

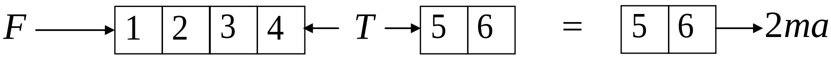
(1)



$$F=12=6ma \quad\Rightarrow\quad a=\frac{2}{m}$$

每一塊木塊所受合力： $ma=2\,(N)$

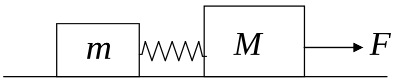
(2)



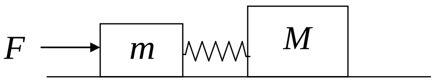
$$T=2ma=4\,(N)$$

例題：

在光滑平面上，有質量為 m 與 M 的兩物體，兩者之間以彈力常數 k 的彈簧連結。在圖(一)中，以 F 之定力作用，彈簧伸長量 x_1。在圖(二)中，以 F 之推力作用，彈簧壓縮量 x_2。則 x_1/x_2=？



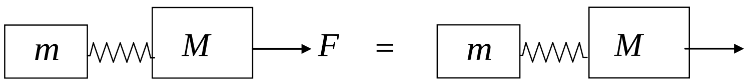
圖(一)



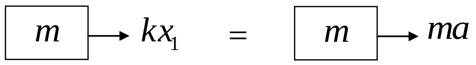
圖(二)

[解答]：

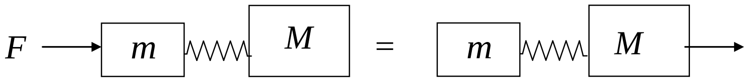
因彈簧有伸長及壓縮，因此兩物體皆受力。因物體皆位於光滑平面上，兩物體皆有加速度。



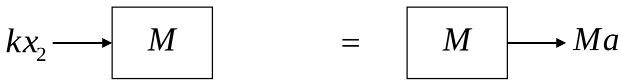
$(m+M)a$ $\qquad a=\dfrac{F}{m+M}$



$kx_1=ma \;\Rightarrow\; x_1=\dfrac{mF}{k(m+M)}$



$(m+M)a$ $\qquad a=\dfrac{F}{m+M}$

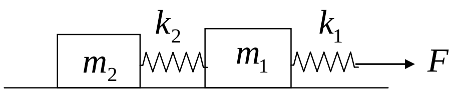


$kx_2=Ma \;\Rightarrow\; x_2=\dfrac{MF}{k(m+M)}$

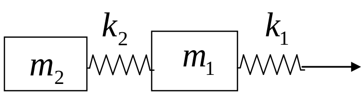
$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{m}{M}$$

例題：

如圖所示，k_1=200 N/m，k_2=100 N/m，m_1=3 kg，m_2=2 kg。不計彈簧質量及摩擦力，若由 k_1 向右拉引，且使之保持 10 cm 之伸長量，則 k_2 彈簧伸長量為多少？

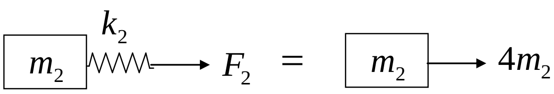


[解答]：



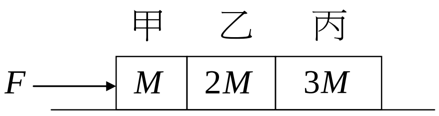
$F=200(0.1)=20\ N$

$$20=(m_1+m_2)a \;\Rightarrow\; a=4\,(m/s^2)$$



$$F_2=k_2x_2=4m_2 \;\Rightarrow\; x_2=0.08\,(m)$$

例題：

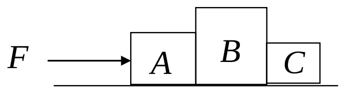


甲、乙、丙三物質質量分別為 M、2M、3M，並排置於一水平桌上，並以一水平力 F 施於甲物體，如圖所示。設甲、丙兩物體與桌面的摩擦可忽略不計，而乙物體與桌面的靜摩擦係數為 0.6，動摩擦係數為 0.3。則當 F=1.5 Mg 時 **(1)**加速度 **(2)**乙物體施於丙物體之力大小為多少？

[解答]：

(1) $a = 0.15g$　　　**(2)** $0.45g$

例題：



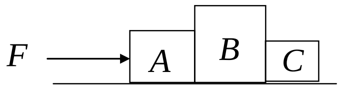
圖中 A、B、C 質量分別為 2kg、3 kg、1 kg。

(1)若不計摩擦力，水平推力 F=18 N 時，A、B 間及 B、C 間相互作用力分別為多少？

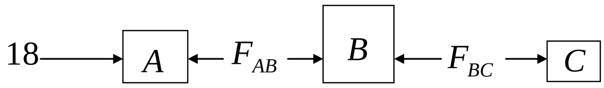
(2)若 A、B、C 與桌面間靜摩擦係數均為 0.5，動摩擦係數均為 0.2，g=10 m/s^2，則欲自靜止推動，需最小水平推力為多少？

(3)承 **(2)**，若 F=36 N，則A、B 間及 B、C 間相互作用力分別為多少？

[解答]：



(1) $18=(2+3+1)a \qquad a=3\,(m/s^2)$



$$18-F_{AB}=2a \qquad F_{AB}=12\,(N)$$

$$F_{BC}=1\times a=3\,(N)$$

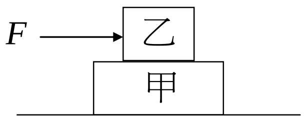
(2) $F=\mu_s(m_A+m_B+m_C)g=0.5(2+3+1)\times 10=30\,(N)$

(3) $36-\mu_k(m_A+m_B+m_C)g=(m_A+m_B+m_C)a \qquad a=4\,(m/s^2)$

$$36-\mu_k m_A g-F_{AB}=2a \quad\Rightarrow\quad F_{AB}=24\,(N)$$

$$F_{BC}-\mu_k m_C g=1\times a \quad\Rightarrow\quad F_{AB}=6\,(N)$$

例題：



如圖所示，甲、乙兩物體疊放在水平桌面上，兩物體之間的接觸面亦與桌面平行。今施一水平力 F 於乙物體，發現乙可移動而甲保持不動，則下列敘述何者可以說明這個現象？

(A)水平力 F 太小，因此推不動甲

(B)甲、乙之間的靜摩擦力太小，因此推不動甲

(C)甲、乙之間的動摩擦力太小，因此推不動甲

(D)水平力 F 是施在乙物上，因此推不動甲

[解答]：

(C)

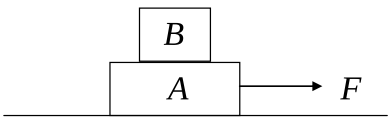
例題：

如圖，A、B 兩物質質量分別為 m_A 及 m_B，所有接觸面皆為水平，則

(1)若 A、B 間靜摩擦係數為 μ_s，兩地面為完全光滑，欲使 B 靜止於 A 上不滑動，則拉力 F 需為多少？

(2)若 A、B 及 A 與地面間靜摩擦係數為 μ_s，動摩擦係數為 μ_k，欲 A 運動後 B 仍靜止於 A 上，則施於 A 之最大拉力 $F_{\max}$ 為若干？

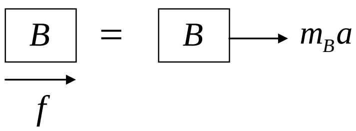
(3)承(2)，若 $F > F_{\max}$，則 A、B 對地之加速度分別為何？



[解答]：

(1) B 靜止於 A 上不滑動，則 A 與 B 具相同加速度

$$F=(m_A+m_B)a \quad \Rightarrow \quad a=\frac{F}{(m_A+m_B)}$$



$$f=m_B a=\frac{m_B F}{(m_A+m_B)}\le \mu_k(m_B g) \quad F\le \mu_k(m_A+m_B)g$$

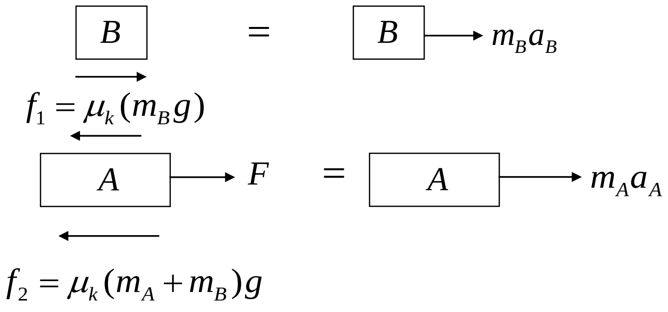
(2) A 運動後 B 仍靜止於 A 上，則 A 與 B 具相同加速度

$$F_{\max}-\mu_k(m_A+m_B)g=(m_A+m_B)a \quad \Rightarrow \quad a=\frac{F_{\max}-\mu_k(m_A+m_B)g}{m_A+m_B}$$

$$f=m_B a=m_B\frac{F_{\max}-\mu_k(m_A+m_B)g}{m_A+m_B}\le \mu_s(m_B g)$$

$$F_{\max}\le(\mu_s+\mu_k)(m_A+m_B)g$$

(3) B 位於 A 上滑動



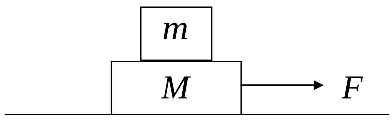
$$\mu_k (m_B g) = m_B a_B \quad \Rightarrow \quad a_B = \mu_k g \ (m/s^2)$$

$$F - \mu_k (m_B g) - \mu_k (m_A + m_B) g = m_A a_A$$

$$a_A = \frac{F - \mu_k m_A g - 2\mu_k m_B g}{m_A} \ (m/s^2)$$

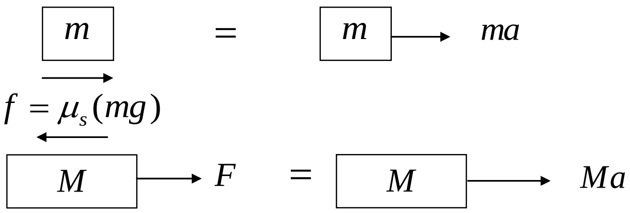
例題：

m=1 kg，M=4 kg，m 與 M 間靜摩擦係數為 0.15，動摩擦係數為 0.1，在 M 上施以水平拉力 F=9 牛頓時， m 及 M 的加速度分別為多少？(M 與地面無摩擦，g=10 m/s^2)



[解答]：

假設 M 運動後 m 仍靜止於 M 上，則 m 與 M 具相同加速度

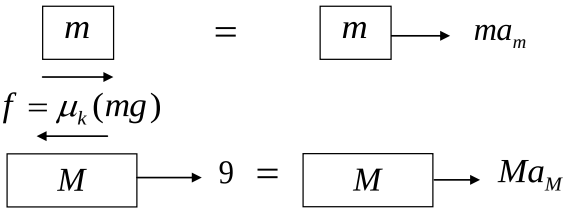


$$F_{\max}=(1+4)a \quad\Rightarrow\quad a=\frac{F_{\max}}{5}$$

$$f=ma=m\frac{F_{\max}}{5}\le 0.15(m\times 10)$$

$$F_{\max}\le 7.5<9$$

表示 m 位於 M 上滑動



$$\mu_k(mg)=ma_m \quad\Rightarrow\quad a_m=1\,(m/s^2)$$

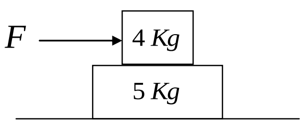
$$9-0.1(mg)=4a_M \quad\Rightarrow\quad a_M=2\,(m/s^2)$$

例題：

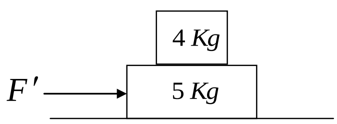
$4\,Kg$ 木塊置於另一 $5\,Kg$ 之木塊上，欲使上邊之木塊在底下之木塊上滑動，需加 $F=12\,N$ 之水平力於上邊木塊，如圖(一)所示。設桌面無摩擦，求

(1)欲使兩木塊一起運動，如圖(二)，施於底下木塊之最大水平力 F' 為何？

(2)木塊一起滑動之加速度為若干？



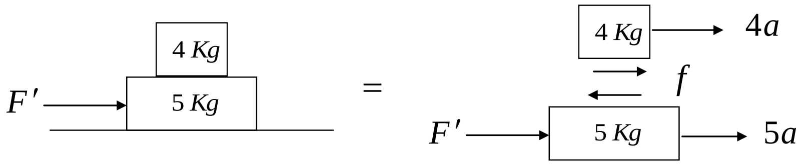
圖(一)



圖(二)

[解答]：

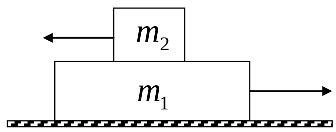
欲使上邊之木塊在底下之木塊上滑動，需加 $F=12\ N$ 之水平力表示兩物塊間的最大靜摩擦力為 $F=12\ N$



欲使兩木塊一起運動 $f=4a\le 12 \quad \Rightarrow \quad a\le 3\,(m/s^2)$

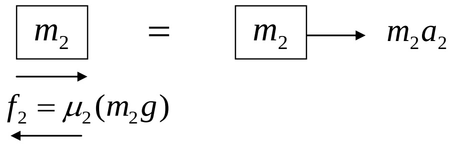
$$F'=(4+5)a=9a\le 27\ (N)$$

例題：

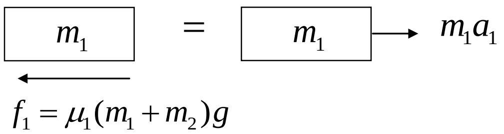


有二長方體木塊，質量分別為 m_1 及 m_2，設 m_1 木塊與水平桌面間之動摩擦係數為 μ_1，二木塊間之動摩擦係數為 μ_2。若 m_1 木塊在桌面上向右滑動時，m_2 木塊相對於 m_1 木塊則有向左的滑動，如圖所示。設木塊在水平方向除摩擦力外不受其他作用力，則此時 m_1 木塊加速度為多少？

[解答]： m_2 位於 m_1 上滑動



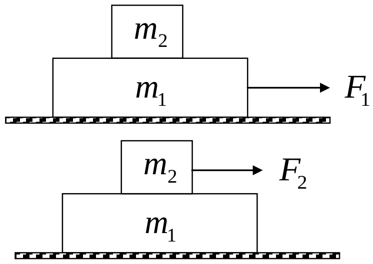
$$\mu_2(m_2g)=-m_2a_2 \quad \Rightarrow \quad a_2=-\mu_2 g$$



$$\mu_2(m_2g)+\mu_1(m_1+m_2)g=-m_1a_1$$

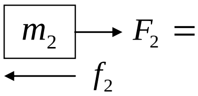
$$a_1=-\left(\frac{m_1+m_2}{m_1}\mu_1+\frac{m_2}{m_1}\mu_2\right)g$$

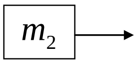
例題：



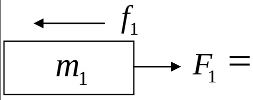
如圖，質量為 m_1 的木塊放在光滑水平面上，木塊上放置一質量為 m_2 的另一木塊，先後分別用水平力拉 m_1 及 m_2，使兩木塊都一起運動(彼此保持相對靜止)。若兩次拉動木塊時，兩木塊間的最大摩擦力分別為 f_1 和 f_2，那麼兩次拉動時，最大拉力比 F_1/F_2 為多少？

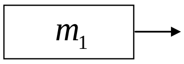
[解答]： $a_1=\dfrac{F_1}{m_1+m_2}$ $\qquad a_2=\dfrac{F_2}{m_1+m_2}$



$=$


m_2a_2 $\quad F_2-f_2=m_2a_2=m_2\dfrac{F_2}{m_1+m_2}$ $\quad F_2=\dfrac{(m_1+m_2)}{m_1}f_2$

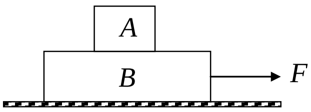


$=$


m_1a_1 $\quad F_1-f_1=m_1a_1=m_1\dfrac{F_1}{m_1+m_2}$ $\quad F_1=\dfrac{(m_1+m_2)}{m_2}f_1$

$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{m_1f_1}{m_2f_2}$$

例題：



木塊 A、B 靜置於水平桌面上，如圖所示。已知木塊 A、B 的質量分別為 2 公斤與 4 公斤，且各接觸面的靜摩擦係數皆為 0.5，動摩擦係數皆為 0.1，令重力加速度 $g = 10\ m/s^2$。今施水平拉力 F 於木塊 B 上，則

(A)當 F = 10 牛頓時，A、B 間的摩擦力為零

(B)當 F = 10 牛頓時，地面施於木塊 B 的摩擦力為 10 牛頓

(C)當 F = 36 牛頓時，A、B 間的摩擦力為 10 牛頓

(D)當 F = 36 牛頓時，地面施於木塊 B 的摩擦力為 6 牛頓

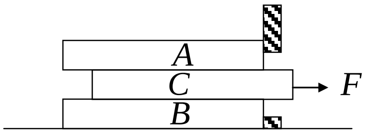
(E)當 F = 40 牛頓時，木塊 A、B 不能同步運動

[解答]：

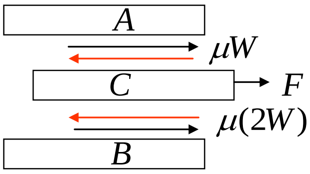
(A)(B)(C)(D)(E)

例題：

A、B、C 三塊重量均為 W 堆積如圖所示。當施力 F 準備將 C 抽出時，A、B 並未移動，且 A、C 間，B、C 間摩擦係數皆為 μ，則沿水平方向將 C 拉出時，所需 F 之最小值為多少？



[解答]：



$$F-\mu W-2\mu W=\frac{W}{g}a\geq 0$$

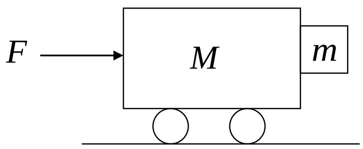
$$F\geq \mu W+2\mu W=3\mu W$$

例題：

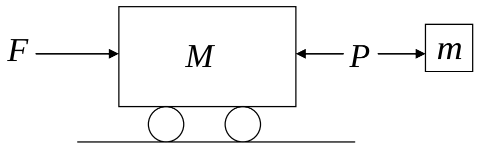
如圖，物體 M 在無摩擦之水平面上運動，而物體 M 與 m 之接觸面其摩擦係數為 μ，若欲使 m 不滑下

(1)所施之力 F 最小為何？

(2)若所施之力增為 2F，則 m 所受的摩擦力為何？



[解答]：



(1)設系統整體的加速度為 a

$$F=(M+m)a \quad \Rightarrow \quad a=\frac{F}{M+m}$$

兩物體間作用力： $P=ma=\dfrac{mF}{M+m}$

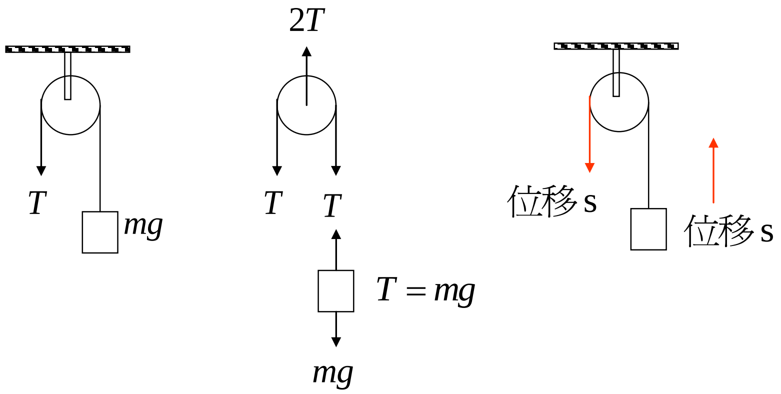
若欲使 m 不滑下： $\mu P \geq mg \quad \Rightarrow \quad F \geq \dfrac{(M+m)g}{\mu}$

(2)因 $2F>F$

摩擦力等於外力 mg

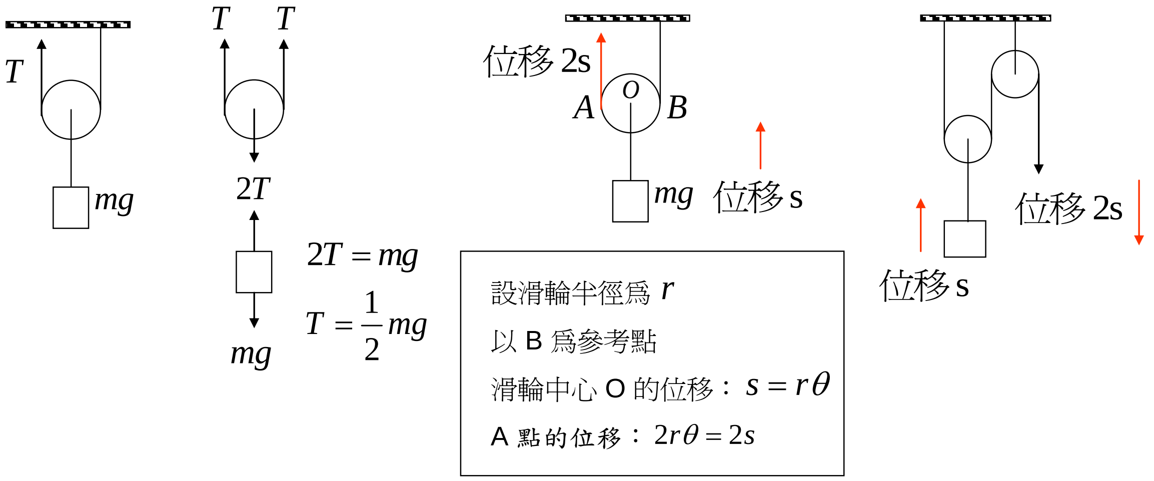
滑輪

定滑輪：用於改變力的方向，達到方便操作的目的。



繞過定滑輪的繩子其兩側張力、位移、速度、加速度的大小相同，但方向相反。

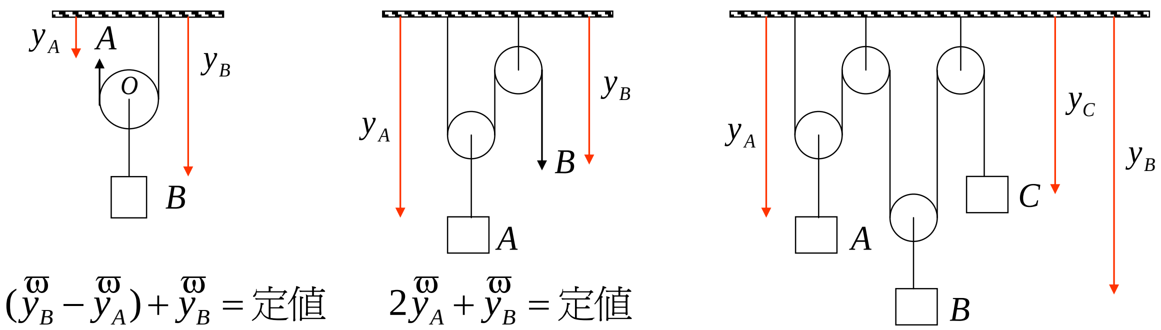
動滑輪：為一省力的裝置



繞過動滑輪的繩子其張力為固定在動滑輪上繩子的 一半。

但位移、速度、加速度的大小為固定在動滑輪上繩子的 2 倍。

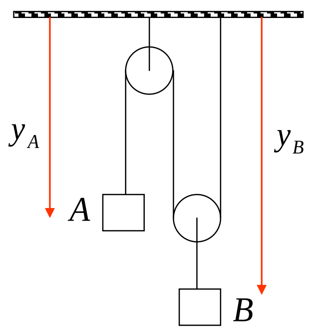
動滑輪間繩子位移、速度、加速度的另種判定方式

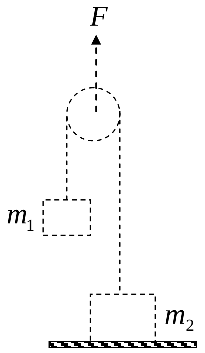


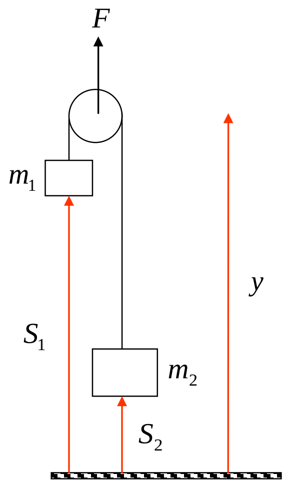
$$(\vec{y}_B - \vec{y}_A) + \vec{y}_B = \text{定值}$$
$$2\vec{v}_B - \vec{v}_A = 0$$
$$2\vec{a}_B - \vec{a}_A = 0$$
$$\boxed{2a_B = a_A}$$

$$2\vec{y}_A + \vec{y}_B = \text{定值}$$
$$2\vec{v}_A + \vec{v}_B = 0$$
$$2\vec{a}_A + \vec{a}_B = 0$$
$$\boxed{2a_A = a_B}$$

$$2\vec{y}_A + 2\vec{y}_B + \vec{y}_C = \text{定值}$$
$$2\vec{v}_A + 2\vec{v}_B + \vec{v}_C = 0$$
$$2\vec{a}_A + 2\vec{a}_B + \vec{a}_C = 0$$
$$\boxed{2a_A + 2a_B = a_C}$$







$$\vec{y}_A + 2\vec{y}_B = \text{定值}$$

$$\vec{v}_A + 2\vec{v}_B = 0$$

$$\vec{a}_A + 2\vec{a}_B = 0$$

$$\boxed{a_A = 2a_B}$$

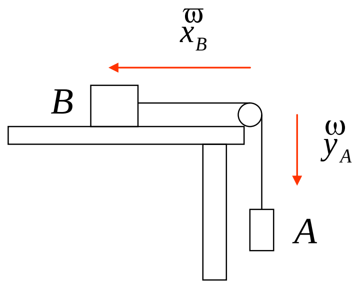
$$\text{繩長} = (\vec{y} - \vec{S}_1) + (\vec{y} - \vec{S}_2) = \text{定值}$$

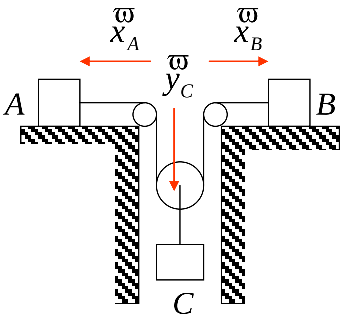
$$2\vec{y} - \vec{S}_1 - \vec{S}_2 = \text{定值}$$

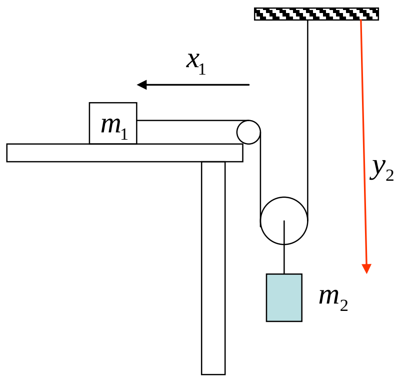
$$2\vec{v} - \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = 0$$

$$2\vec{a} - \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = 0$$

$$\boxed{2a = a_1 + a_2}$$







$$\vec{y}_A + \vec{x}_B = \text{定值}$$

$$\vec{v}_A + \vec{x}_B = 0$$

$$\vec{a}_A + \vec{a}_B = 0$$

$$\boxed{a_A = a_B}$$

$$\vec{x}_A + \vec{x}_B + 2\vec{y}_C = \text{定值}$$

$$\vec{v}_A + \vec{v}_B + 2\vec{v}_C = 0$$

$$\vec{a}_A + \vec{a}_B + 2\vec{a}_C = 0$$

$$\boxed{a_A + a_B = 2a_C}$$

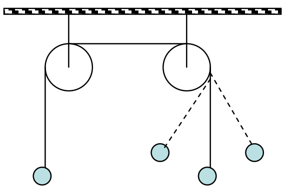
$$\vec{x}_1 + 2\vec{y}_2 = \text{定值}$$

$$\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 = 0$$

$$\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 = 0$$

$$\boxed{a_1 = 2a_2}$$

例題：



有一繩子跨過兩定滑輪(假設無摩擦)，繩之兩端分別掛兩等質量物體。靜止平衡時，兩物在同一高度。今若右邊物體在其平衡位置附近做來回擺動，則左邊物體將會

(A)左右擺動　　(B)向上運動

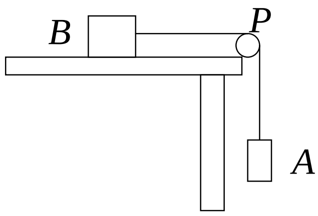
(C)向下運動　　(D)做忽上忽下的運動

(E)靜止

[解答]：

(D)

例題：



如圖所示，設 A、B 兩木塊之質量分別為 m_A 與 m_B，B 與桌面無摩擦力。當用手拉住使木塊靜止時，繩 P 中之張力為 T_1，當放手使木塊運動時，繩中之張力為 T_2，則 $T_1/T_2=?$

[解答]：

當用手拉住木塊靜止時 $T_1 = m_A g$

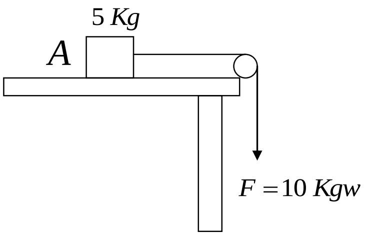
當放手時，系統的加速度為 $a=\dfrac{m_A g}{m_A+m_B}$

$$m_A g - T_2 = m_A a \quad \Rightarrow \quad T_2=\frac{m_B g}{m_A+m_B}$$

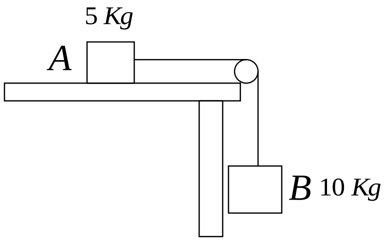
$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{m_A+m_B}{m_B}$$

例題：

如圖所示，在光滑水平桌面上，木塊 A 的加速度何者較大？其值分別為多少？



圖(一)



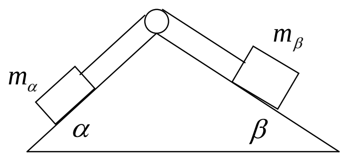
圖(二)

[解答]：

圖(一) $a = 19.6\,(m/s^2)$

圖(二) $a = 6.5\,(m/s^2)$

例題：



(1)如圖，在不同斜面的物體，質量分別為 m_α 及 m_β， 由一輕繩通過滑輪連在一起，不計摩擦力和繩子的質量，若 m_α 沿著斜面向下滑動，則

(A)$m_\alpha \sin\alpha > m_\beta \sin\beta$ **(B)** $m_\alpha \cos\alpha > m_\beta \sin\beta$

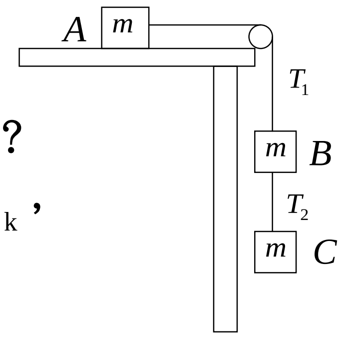
(C) $m_\alpha g > m_\beta g$ **(D)** $\alpha > \beta$

(2)上題中 m_α=100 kg，m_β=50 kg，α=30^0，β=60^0。則此系統沿斜面的加速度為多少？ $(g = 10\,m/s^2)$

(3)上題中繩子張力為多少？

[解答]： (1) **(A)** (2) $a = 0.446\,(m/s^2)$ (3) $T = 455.3\,(N)$

例題：



(1)圖中若不計摩擦力，則 T_1 與 T_2 為多少？

(2)若桌面上物體與桌面的動摩擦係數為 μ_k，則 T_1 與 T_2 為多少？

[解答]：

(1) $2mg=(m+m+m)a \Rightarrow a=\dfrac{2g}{3}$

$mg-T_2=ma \Rightarrow T_2=\dfrac{1}{3}mg \quad mg+T_2-T_1=ma \Rightarrow T_1=\dfrac{2}{3}mg$

(2) $2mg-\mu_k mg=(m+m+m)a \Rightarrow a=\dfrac{2-\mu_k}{3}g$

$mg-T_2=ma \Rightarrow T_2=\dfrac{1}{3}(1+\mu_k)mg$

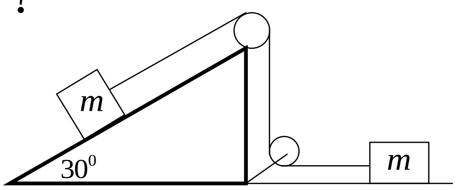
$mg+T_2-T_1=ma \Rightarrow T_1=\dfrac{2}{3}(1+\mu_k)mg$

例題：

圖中若不計滑輪及繩質量，亦無摩擦力，則

(1)系統之加速度為多少？

(2)繩之張力為多少？



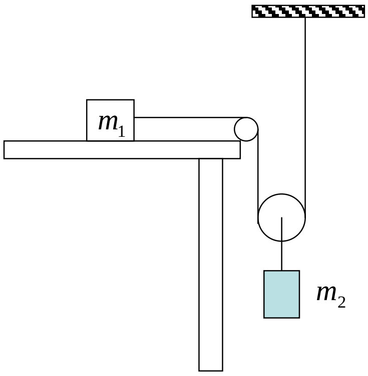
[解答]：

(1) $mg\sin 30^0=(m+m)a \Rightarrow a=\dfrac{g}{4}$

(2) $T=ma=\dfrac{mg}{4}$

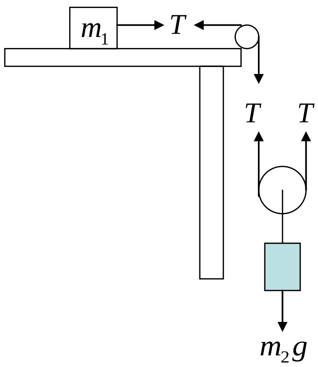
例題：

如圖所示，兩物體的加速度為 a_1 及 a_2，以 m_1、m_2 與 g 表之，免計一切摩擦力及繩與滑輪的質量。



[解答]：

$$\begin{cases} a_1 = 2a_2 \\ T = m_1 a_1 \\ m_2 g - 2T = m_2 a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \dfrac{2m_2 g}{4m_1 + m_2} \\ a_2 = \dfrac{m_2 g}{4m_1 + m_2} \end{cases}$$

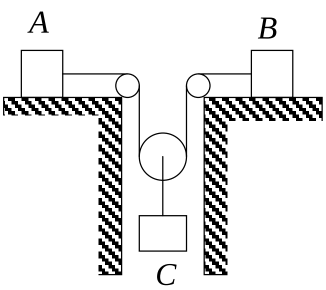


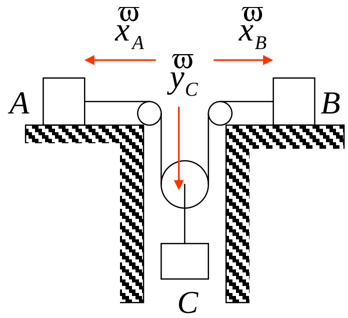
例題：

如圖所示，$m_A = m_C = 2\,Kg$，$m_B = 1\,Kg$ 不計摩擦力、繩重及滑輪質量，$(g = 10\,m/s^2)$，求

(1) C 的加速度 **(2)** A 的加速度

(3) B 的加速度 **(4)** 細繩的張力





[解答]：

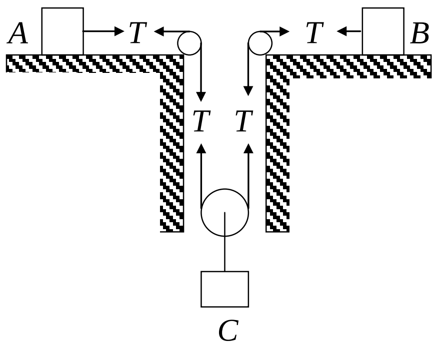
$$\vec{x}_A+\vec{x}_B+2\vec{y}_C=\text{定值}$$

$$\vec{v}_A+\vec{v}_B+2\vec{v}_C=0$$

$$\vec{a}_A+\vec{a}_B+2\vec{a}_C=0$$

$$\boxed{a_A+a_B=2a_C}$$

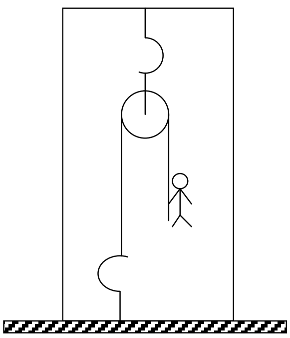
$$\begin{cases} a_A+a_B=2a_C \\ T=m_Aa_A \\ T=m_Ba_B \\ m_Cg-2T=m_Ca_C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_A+a_B=2a_C \\ T=2a_A \\ T=a_B \\ 2g-2T=2a_C \end{cases}$$



$$\begin{cases} a_A=20/7\ (m/s^2) \\ a_B=40/7\ (m/s^2) \\ a_C=30/7\ (m/s^2) \\ T=40/7\ (N) \end{cases}$$

例題：

訓練營中有一攀登裝置如圖所示。若圖中人重 600 牛頓，框架和鉤子重 1000 牛頓，滑輪重 100 牛頓，繩重不計，此人拉繩向上等速攀爬。下列敘述何者正確？



(A)繩子受力 600 牛頓

(B)上面的鉤子受 1700 牛頓的下拉力

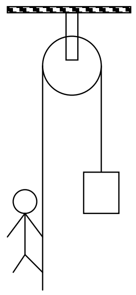
(C)下面的鉤子受繩拉力為 1600 牛頓

(D)地面支撐框架的力為 1700 牛頓

(E)假設上面的鉤子最大支撐力為 2000 牛頓，若希望攀登者亦能等速攀爬，其體重不可超過 950 牛頓

[解答]： (A)(D)(E)

例題：



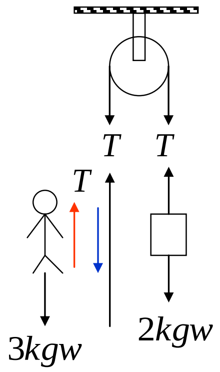
如圖所示，猴子重 3 Kgw，物重 2 Kgw，猴子應做何種運動可使物體保持靜止？

(A)向上等速運動　　(B)向下等速運動

(C)向上 $\frac{2g}{3}$ 等加速運動　　(D)向下 $\frac{2g}{3}$ 等加速運動

(E)向下 $\frac{g}{3}$ 等加速運動

[解答]：



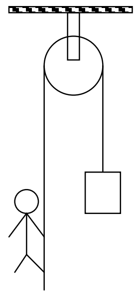
物體保持靜止 $T = 2g\,(N)$

猴子運動可使物體保持靜止

$$3g - T = 3a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{g}{3}\,(\downarrow)$$

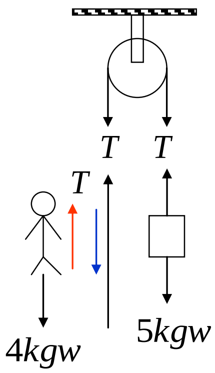
(E)

例題：



如圖所示，物體質量為 5 Kg，猴子的質量為 4 Kg。若猴子以等加速度 5 m/s^2 沿繩子向上爬，問這段時間內，物體的加速度大小及方向為何？$(g = 10\, m/s^2)$

[解答]：



$$T - 4g = 4\times 5 \quad \Rightarrow \quad T = 60\,(N)$$

$$T - 5g = 5a \quad \Rightarrow \quad a = 2\,(m/s^2)$$

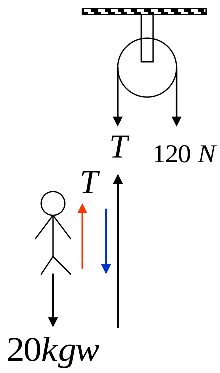
例題：

質量為 20 kg 的猴子沿著一輕繩自樹上滑下，此繩之最大負荷為 120 牛頓，$g=10\ m/s^2$，欲使該繩不斷裂，則該猴子的最小加速度大小為多少？

[解答]：

$$T = 120\,(N)$$

$$20g - T = 20a \quad \Rightarrow \quad a = 4\,(m/s^2)$$

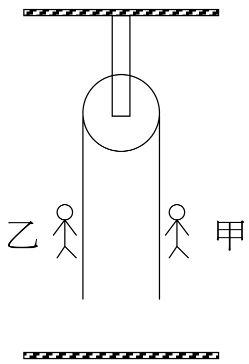


例題：

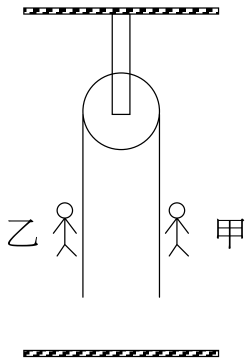
如圖所示，甲、乙兩人質量各為 M 與 m，且 M > m。兩人各抓住繩的一端，該繩跨過一定滑輪，設重力加速度為 g。則

(1)當甲、乙兩人都緊抓住繩子不鬆手時，繩的張力為若干？

(2)當甲對地面無相對運動時，乙對地面的加速度為何？



[解答]：



(1) $Mg - mg = (M+m)a \Rightarrow a = \dfrac{(M-m)g}{M+m}$

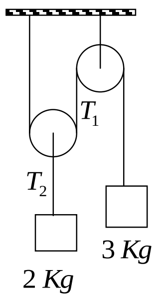
$$Mg - T = Ma \Rightarrow T = \frac{2mM}{M+m}g$$

(2)當甲對地面無相對運動時， $a_{甲} = 0$

$$Mg - T = 0 \Rightarrow T = Mg$$

$$T - mg = ma_{乙} \Rightarrow a_{乙} = \frac{M-m}{m}g\ (\uparrow)$$

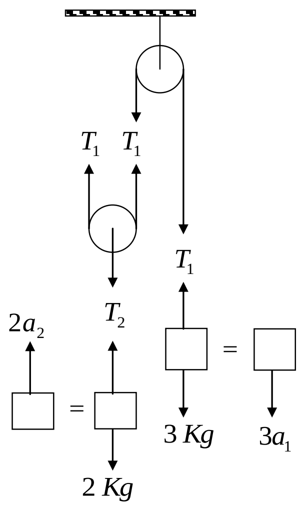
例題：



如圖所示，不計滑輪及繩質量，亦無摩擦， $g = 10\,m/s^2$ **，則** T_1 **、** T_2 **分別為多少？**

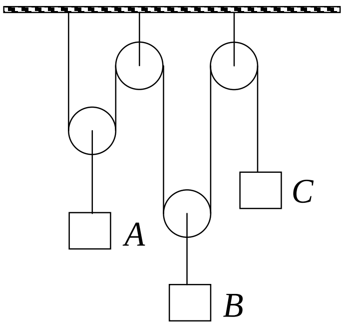
[解答]：

$$\begin{cases} a_1 = 2a_2 \\ T_2 - 2g = 2a_2 \\ 2T_1 = T_2 \\ 3g - T_1 = 3a_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \dfrac{40}{7}\,(m/s^2) \\ a_2 = \dfrac{20}{7}\,(m/s^2) \\ T_1 = \dfrac{90}{7}\,(N) \\ T_2 = \dfrac{180}{7}\,(N) \end{cases}$$



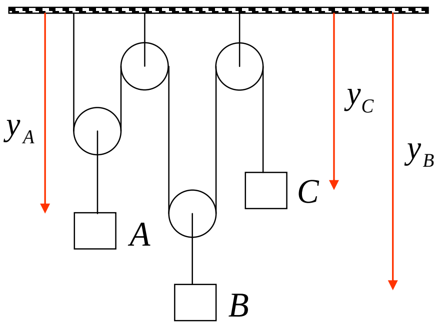
例題：

所有的滑輪質量皆可忽略、摩擦力不計，用輕繩連接成如圖所示的滑輪組A、B、C，三個木塊質量皆為 m。則木塊 C 的下降加速度為何？



[解答]：

$$\begin{cases} 2a_A + 2a_B = a_C \\ mg - T = ma_C \\ 2T - mg = ma_A \\ 2T - mg = ma_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = \dfrac{5}{9}mg \\ a = \dfrac{5}{9}g \end{cases}$$



例題：

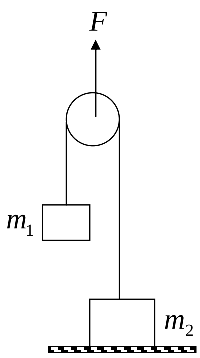
如圖所示，某人施一向上力 F 於滑輪軸上，假設滑輪及繩均無質量，且無摩擦，兩物體 $m_1 = 1\,Kg$、$m_2 = 2\,Kg$，連接於繩之兩端，物體 m_2 置於地板上，則

(1) F 最大是多少時，m_2 仍可靜止於地板上？ $g = 10\,m/s^2$

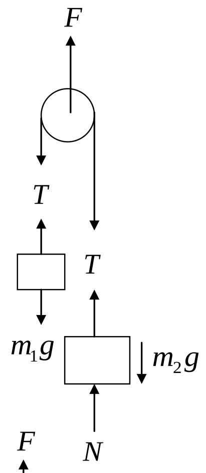
(2)若 $F = 100\,N$ 向上，則繩之張力是多少？

(3)於 **(2)** 中，m_1、m_2 之加速度分別為何？

(4)滑輪此時的加速度為何？



[解答]：

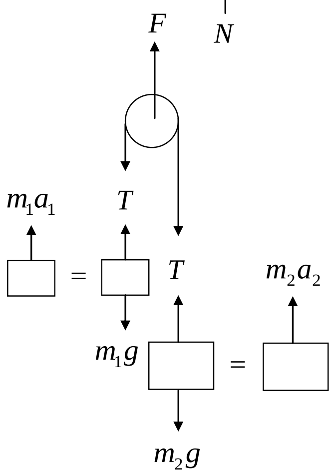


(1) m_2 仍可靜止於地板上，表示系統仍靜止

$$\begin{cases} F = 2T \\ T - m_2 g + N = 0 \end{cases} \Rightarrow N = m_2 g - \frac{F}{2} \geq 0$$

$$F \leq 2m_2 g = 40\,(N)$$

(2)(3)



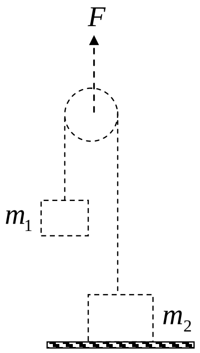
$$\begin{cases} F = 2T \\ T - m_1 g = m_1 a_1 \\ T - m_2 g = m_2 a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = 50\,(N) \\ a_1 = 40\,(m/s^2) \\ a_2 = 15\,(m/s^2) \end{cases}$$

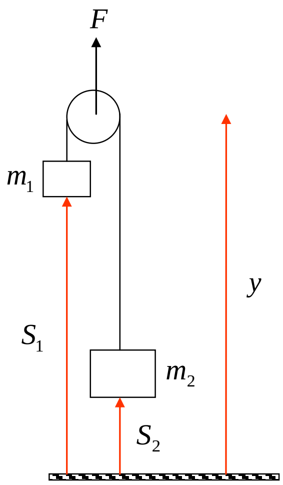
(4) 繩長 $=(y-S_1)+(y-S_2)=$ 定值

$$2y - S_1 - S_2 = \text{定值}$$

$$2v - v_1 - v_2 = 0$$

$$2a - a_1 - a_2 = 0$$

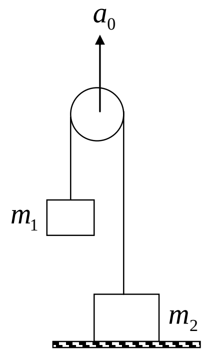




$$a = \frac{1}{2}(a_1 + a_2) = \frac{1}{2}(40 + 15) = 27.5\,(m/s^2)$$

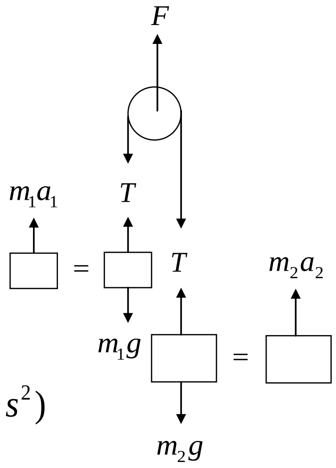
例題：

如圖所示，滑輪質量不計且無摩擦，質量極輕微之細繩跨於輪上，兩端分別繫以 $m_1 = 2\,Kg$ 及 $m_2 = 3\,Kg$ 兩物體。整個系統以 $a_0 = 3\,m/s^2$ 向上做等加速度運動，則繩子的張力為多少？



[解答]：

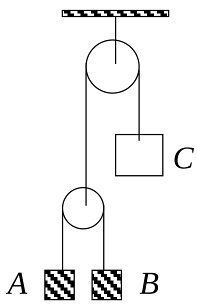
$$\begin{cases} F = 2T \\ T - m_1 g = m_1 a_1 \\ T - m_2 g = m_2 a_2 \\ a_0 = \dfrac{1}{2}(a_1 + a_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F = 2T \\ T - 2g = 2a_1 \\ T - 3g = 3a_2 \\ 3 = \dfrac{1}{2}(a_1 + a_2) \end{cases}$$



$F = 62.4\,(N) \quad T = 31.2\,(N) \quad a_1 = 5.6\,(m/s^2) \quad a_2 = 0.4\,(m/s^2)$

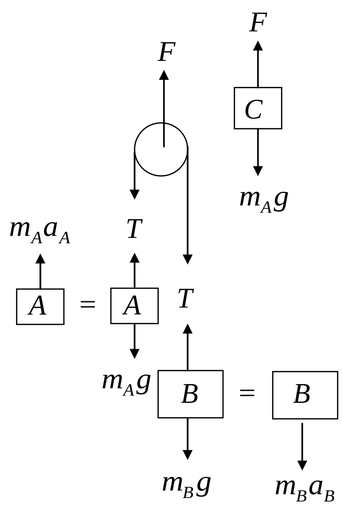
例題：

如圖所示，A、B 質量為 m 及 2m，滑輪及繩重不計。若不使定滑輪轉動，則 C 的質量為多少？



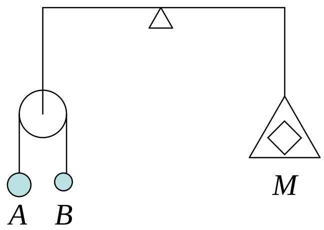
[解答]：

$$\begin{cases} F = m_C g = 2T \\ a_A = a_B \\ T - m_A g = m_A a_A \\ m_B g - T = m_B a_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_C g = 2T \\ a_A = a_B \\ T - mg = m a_A \\ 2mg - T = 2m a_B \end{cases}$$



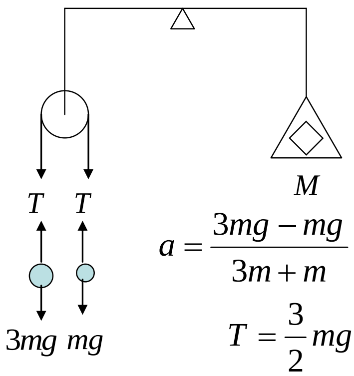
$$\begin{cases} m_C = \dfrac{8}{3} m \\ a_A = a_B = \dfrac{g}{3} \\ T = \dfrac{4}{3} mg \end{cases}$$

例題：



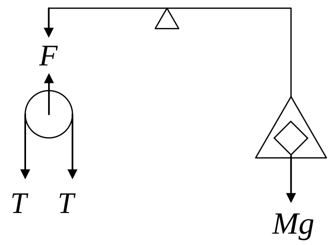
如圖所示，質量 3m、m 之 A、B 兩物以輕繩連結後，跨過質量不計的滑輪(不考慮繩與滑輪的摩擦力)。滑輪吊於等臂天平的左端，欲使天平呈平衡狀態，則右端秤盤的總質量 M 為多少？

[解答]：



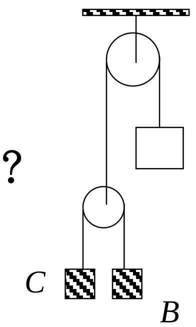
$$a=\frac{3mg-mg}{3m+m}=\frac{1}{2}g$$

$$T=\frac{3}{2}mg$$



$$F=2T=Mg \quad\Rightarrow\quad M=3g$$

例題：



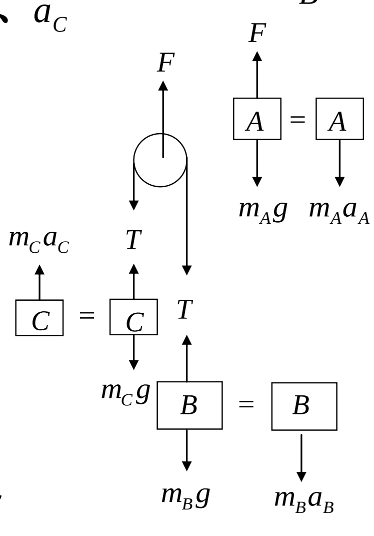
如圖，A、B、C 之質量分別為 3 kg、2 kg、1 kg (動滑輪及繩重鈎不計)，求三物體之加速度各多少？

[解答]：

設物塊 A、B、C 的加速度分別為 a_A、a_B、a_C

設連接物塊 B、C 繩子的加速度為 a_s

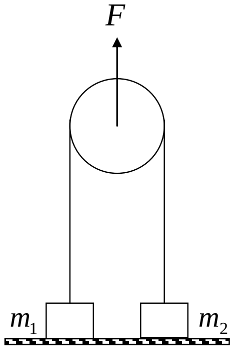
$$\begin{cases}a_B=a_s-a_A\\a_C=a_s+a_A\end{cases}\Rightarrow\quad a_B+a_A=a_C-a_A$$



$$\begin{cases}m_Ag-F=m_Aa_A\\F=2T\\a_B+a_A=a_C-a_A\\T-m_Cg=m_Ca_C\\m_Bg-T=m_Ba_B\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3g-F=3a_A\\F=2T\\a_C-a_B=2a_A\\T-g=a_C\\2g-T=2a_B\end{cases}\quad\begin{cases}a_A=g/17\\a_B=5g/17\\a_C=7g/17\\T=24g/17\end{cases}$$

例題：

如圖，滑輪及繩子質量不計。m_1 為 3 kg，m_2 為 2 kg。若 m_1 及 m_2 向上的加速度比為 1:2， $g=10\ m/s^2$，則 F 大小為多少？



[解答]：

$$F = 120\,(N)$$

例題：

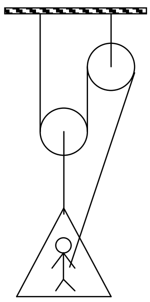
如圖所示，一人重 60 Kg 站在一重 30 Kg 之平台上，垂直拉下一繞過滑輪的繩索。設滑輪與繩索之摩擦及質量可略去不計，則

(1)此人至少要施多少力始能將平台拉起？

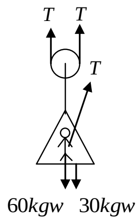
(2)平台對人的作用力為多少？

(3)人所能施力的最大值為多少？

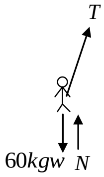
(4)人所能拉起的最大平台重量多少？



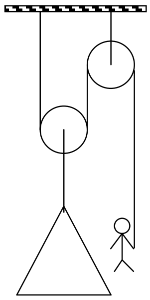
[解答]：



(1) $3T \geq 60+30 \quad \Rightarrow \quad T \geq 30\ (kgw)$



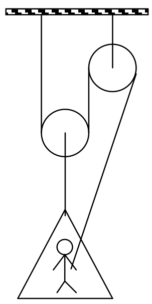
(2) $T+N=60 \quad \Rightarrow \quad N=30\ (kgw)$



(3)人若施力過大，則人與平臺將無接觸，整個人吊在平台上。因此人所能施力最大值為人本身的重量， 60 kgw。

(4) $2T=60 \quad \Rightarrow \quad T=30\ (kgw)$

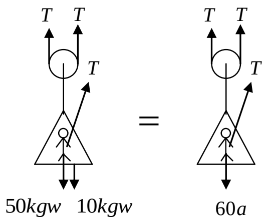
例題：

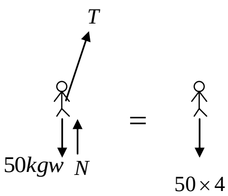


如圖所示，人的質量為 50 Kg，平台質量為 10 Kg，人與平台一起以 $a=4\ m/s^2$ 向下做等加速度運動時，人與平台間之正向力為若干？ $(g=10\ m/s^2)$

[解答]：

$(50+10)g-3T=60\times4 \quad \Rightarrow \quad T=120\ (N)$

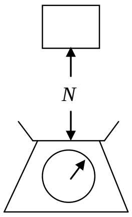




$50g-N-T=50\times4 \quad \Rightarrow \quad N=180\ (N)$

第 4-3 節 假想力與牛頓第三運動定律

實重：物體實際的重量，指物體所受的萬有引力



視重：物體置於磅秤或彈簧上的讀數

磅秤讀數：磅秤施於物體向上的力

彈簧讀數：彈簧施於物體的力

若物體處於加速度運動時，視重不等於實重。

失重：視重為零，即磅秤或彈簧上的讀數為零

例如：自由落體的人、環繞地球軌道運行太空船內的人

加速座標系與假想力

慣性座標系：指靜止或做等速度運動的座標系統。牛頓第一定律的主要意義，就是對慣性座標下定義。牛頓的三個運動定律只在慣性座標系統中才成立。一般以地面為參考座標

加速座標系：指具加速度的座標系統

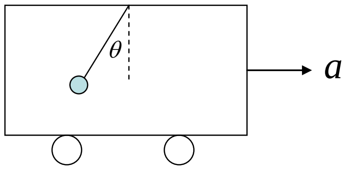
假想力：觀測者在加速座標系中比在慣性座標系中的觀測者多感受到的力

$$\vec{F}_{物地} = m\vec{a}_{物地} = m(\vec{a}_{物車} + \vec{a}_{車地}) = m\vec{a}_{物車} + m\vec{a}_{車地} = \vec{F}_{物車} + m\vec{a}_{車地}$$

$$\vec{F}_{物車} - \vec{F}_{物地} = -m\vec{a}_{車地}$$

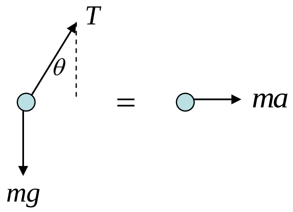
$$\boxed{\vec{F}_{假想力} = -m\vec{a}_{車地}}$$ 負號表示方向與座標系運動方向相反

以一加速向右行進的車子中天花板懸掛一擺錘為例



對地面的觀測者(慣性座標系)：

擺錘以加速度 a 運動

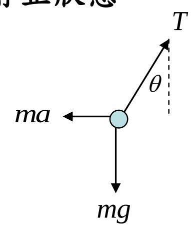


$$\sum F_x = T\sin\theta = ma$$ 牛頓第二定律

$$\sum F_y = T\cos\theta - mg = 0$$ 牛頓第一定律

對車上的觀測者(加速座標系)：

擺錘呈靜止狀態



$$\sum F_x = T\sin\theta - ma = 0$$ 牛頓第一定律

$$\sum F_y = T\cos\theta - mg = 0$$ 牛頓第一定律

例題：

在汽車的天花板上懸一彈簧秤，其下掛一質量為 m 公斤的物體。當汽車前進時，彈簧與鉛直線夾 37^0 角。則

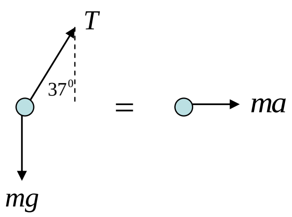
(1)汽車的加速度為何 ？

(2)彈簧秤的讀數為何？

(3)車上的觀察者所認為物體受到假想力的大小為何？

[解答]：

(1)(2)

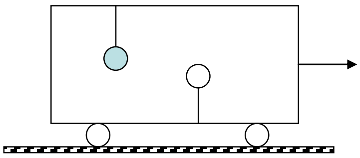


$$\sum F_y = T\cos 37^0 - mg = 0 \qquad T = \frac{5}{4}mg$$

$$\sum F_x = T\sin\theta = ma \qquad a = \frac{3}{4}g$$

(3) 假想力的大小： $ma = \dfrac{3}{4}mg$

例題：



水平地面上靜止密閉公車內地板繫一汽球，天花板懸一鐵球，如圖所示。

若公車突然向前加速前進，下列敘述何者正確？

(A)車上觀察者見鐵球向車後方偏

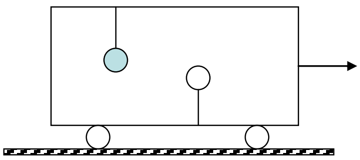
(B)車上觀察者見繫鐵球之繩張力變大

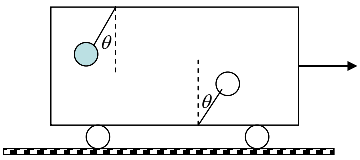
(C)車上觀察者若使鐵球以單擺方式擺動，則見其週期相對於公車不動時為大

(D)車上觀察者見汽球向車後方偏

(E)對車上觀察者而言，汽球受一向後的假想力作用

[解答]： (A)(B)(E)





鐵球向後偏，氣球向前偏

繫鐵球之繩張力 $F = m\sqrt{g^2 + a^2} = mg'$

週期 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g'}} < 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$

鐵球、汽球所受的假想力皆往後

牛頓第三運動定律

凡有一個作用力，必同時產生一個反作用力，二者大小相等、方向相反、在同一直線上。

性質：(1)分別作用於不同物體上，不可互相抵銷

(2)此組力對系統而言為內力，不影響系統運動狀態

(3)此組力對兩物而言為外力，可影響物體分別之動狀態

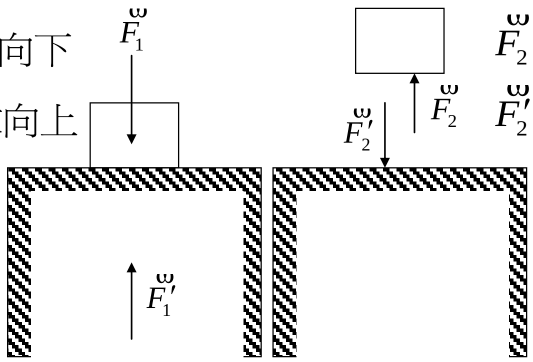
(4)假想力只有受力體而無施力體， 故無反作用力

$\vec{F}_1$:地球吸引物體向下

$\vec{F}_1'$:物體吸引地球向上

$\vec{F}_2$:桌子施力於物體向上

$\vec{F}_2'$:物體施力於桌子向下



$\vec{F}_1$ 與 $\vec{F}_1'$ 互為作用力與反作用力

$\vec{F}_2$ 與 $\vec{F}_2'$ 互為作用力與反作用力

物體共受兩個力： $\vec{F}_1$ 與 $\vec{F}_2$ 。因物體靜止，所以

$$\vec{F}_1+\vec{F}_2=0$$

牛頓第三運動定律例子：

(1)人腳踩滑板(穿溜冰鞋)而用力推牆，結果人會向後退

(2)划船(游泳)時，以槳(手)向後施力於水，結果船(人)向前進

(3)充氣的汽球釋放，汽球施力將空氣向後噴出，結果汽球向前進

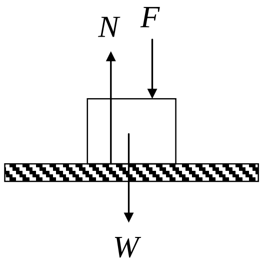
(4)子彈向前射出時，槍枝向後退

(5)火箭或噴射機向後噴出大量廢氣，火箭或噴射機向前衝

(6)用力踢足球，球急射而出，腳隱隱作痛

例題：

如圖所示，有人施力 F 於一放置在桌面上的木塊。設 W 代表木塊所受的地球引力，N 代表桌面作用於木塊的力。下列有關作用力與反作用力的敘述何者正確？



(A) F 與 W 互為作用力與反作用力

(B) F 與 N 互為作用力與反作用力

(C) W 與 N 互為作用力與反作用力

(D) F、W 與 N 互為作用力與反作用力

(E) F、W 與 N 三者中沒有任何作用力與反作用力

[解答]：

(E)

例題：

當成熟的蘋果由樹上落下時，根據牛頓的萬有引力定律，下列何者敘述正確？

(A)地球對蘋果有吸引力，但是蘋果對地球沒有吸引力

(B)蘋果對地球有吸引力，但地球對蘋果沒有吸引力

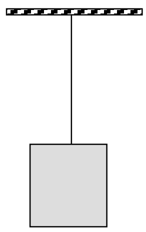
(C)僅考慮力的量值，地球對蘋果的吸引力大於蘋果對地球的吸引力

(D)僅考慮力的量值，地球對蘋果的吸引力小於蘋果對地球的吸引力

(E)僅考慮力的量值，地球對蘋果的吸引力等於蘋果對地球的吸引力

[解答]： **(E)**

例題：



如圖所示，設天花板對繩的作用力為 F_1，繩對天花板的作用力為 F_2，繩對物體的作用力為 F_3，繩所受的重力為 F_4，物體所受的重力為 F_5，下列敘述何者正確？

(A) F_2 是 F_1 的反作用力　　**(B)** F_3 是繩的張力

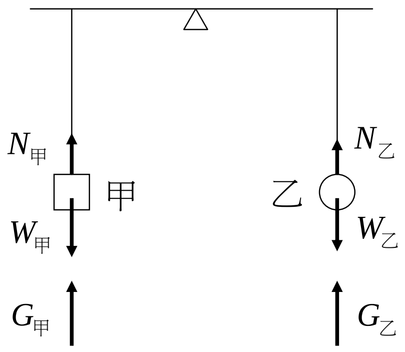
(C) $F_3 = F_5$　　**(D)** $F_2 = F_3$

(E) $F_1 = F_5$

[解答]：

(A)(C)

例題：



如圖所示，甲與乙兩物體在等臂天平兩端，天平保持靜止，其中 $W_{甲}$ 與 $W_{乙}$ 分別代表甲與乙所受的重力，$N_{甲}$ 與 $N_{乙}$ 分別為天平對甲與乙的向上拉力，$G_{甲}$ 與 $G_{乙}$ 分別代表甲與乙對地球的萬有引力。下列選項中哪一對力互為作用力與反作用力？

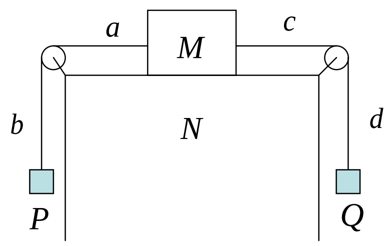
(A) $W_{甲}$ 、$W_{乙}$ **(B)** $N_{甲}$、$W_{甲}$

(C) $N_{甲}$ 、$N_{乙}$ **(D)** $G_{甲}$、$W_{甲}$

[解答]：

(D)

例題：



如圖所示，桌面 N 上方的物體 M 靜止不動，且無任何摩擦力。則下列何者是一對作用力、反作用力？

(A) P 物對繩 b 的拉力，與繩 b 對 P 物的拉力

(B) 繩 a 對 M 的拉力，與繩 c 對 M 的拉力

(C) Q 物的重力，與繩 d 對Q 的拉力

(D) M 的重力，與 N 給 M 的正向力

(E) M 對 N 的下壓力，與 N 給 M 的正向力

[解答]：

(A)(E)

例題：

靜置於桌面重量 W 的物體，受有桌面作用的正向力 N。則 W 與 N 的關係為

(A)為一對作用力與反作用力

(B)不作用於同一物體上

(C)可以互相抵銷

(D)不可以互相抵銷

(E)不是作用力與反作用力

[解答]：

(C)(E)

例題：

下列敘述何者正確？

(A)地球上的人同時自西向東跳時，地球的自轉可能停止

(B)船靠岸時人往岸上跳船必後退

(C)做太空漫步的太空人可利用火箭噴氣的反作用力返回太空艙

(D)噴射機的飛行是靠空氣的反作用力

(E)兩人打架時互相作用的力總和必大小相等

[解答]：

(A)(B)(C)(E)

噴射機的飛行是靠所排廢氣的反作用力

例題：

手持細繩上端，繩下端繫重為 W 的物體，繩重可以不計。以 $\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$、$\vec{F}_3$、$\vec{F}_4$ 分別表示 手對繩、繩對手、繩對物、物對繩 所施的力。下列敘述何者正確？

(A)若物體向上等速運動，則 $|\vec{F}_1|=|\vec{F}_2|=|\vec{F}_3|=|\vec{F}_4|=W$

(B)承(A)，$\vec{F}_1$ 和 $\vec{F}_4$ 為一對作用力與反作用力

(C)若物體以等加速度 a 上升，重力加速度為 g，則 $|\vec{F}_1|=W(1+\dfrac{a}{g})$

(D)承(C)，$|\vec{F}_2|=W(1-\dfrac{a}{g})$

[解答]：

(A)(C)

例題：

將質量 50 公斤及 60 公斤之甲、乙兩人，分別站在不同的磅秤上，互相用盡全力將對方舉起。若甲、乙之舉重能力各為 150 牛頓及 200 牛頓，則甲、乙兩人的磅秤讀數分別為多少牛頓？ $(g=9.8\,m/s^2)$

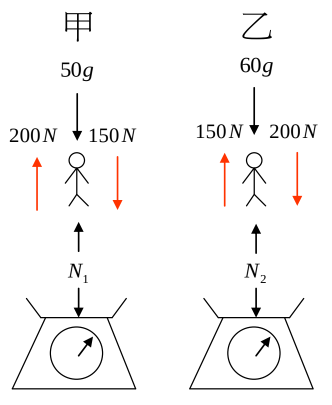
[解答]：

甲 $N_1+200-150-50\times 9.8=0$

$N_1=440\,(N)$

乙 $N_2-200+150-60\times 9.8=0$

$N_2=638\,(N)$



例題：

在電梯的天花板下掛一彈簧秤，秤下懸掛一 5 kg 的物體。
當電梯以 (1)等速率 3 m/s 上升時
(2)等加速度 0.98 m/s² 上升時 (3)等加速度 0.98 m/s² 下降時
彈簧秤的讀數各為多少公斤？

[解答]：

(1) $N-5g=0 \quad \Rightarrow \quad N=5g$ 彈簧秤讀數：$5\,(kgw)$

(2) $N-5g=5\times 0.98 \quad \Rightarrow \quad N=5g+5\times\frac{g}{10}=5.5g$

彈簧秤讀數：$5.5\,(kgw)$

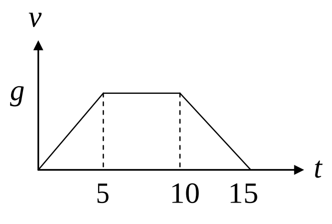
(3) $N-5g=-5\times 0.98 \quad \Rightarrow \quad N=5g-5\times\frac{g}{10}=4.5g$

彈簧秤讀數：$4.5\,(kgw)$

例題：

重量 60 kg 之人進入電梯後立於一彈簧磅秤上。當電梯開始運動時，他發現彈簧磅秤的指標在開始 5 秒內指示 72 kg，5 秒至 10 秒間指示於 60 kg，最後 5 秒內指示於 48 kg，然後電梯停止。則在此 15 秒內電梯所行距離為多少？$(g=9.8\,m/s^2)$

[解答]：



5 秒內 $(72-60)g=60a_1 \quad \Rightarrow \quad a_1=\frac{g}{5}$

5 秒至 10 秒間 $a_2=0$

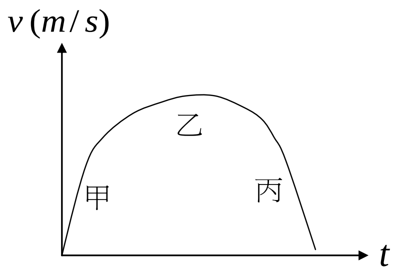
10 秒至 15 秒間 $(48-60)g=60a_3 \quad \Rightarrow \quad a_3=-\frac{g}{5}$

電梯所行距離：$\frac{(5+15)\times g}{2}=98\,(m)$

例題：

小明靜止站立於磅秤上量體重時，磅秤的讀數為 W。在 t=0 時，他開始曲腿下蹲。若以垂直向下為速度的正方向，他的質心速度 v 隨時間 t 的變化如圖所示。其中乙點代表最大速度，則下列敘述何者正確？

(A)在甲點時，磅秤的讀數小於 W
(B)在甲點時，磅秤的讀數大於 W
(C)在乙點時，磅秤的讀數小於 W
(D)在乙點時，磅秤的讀數大於 W
(E)在丙點時，磅秤的讀數小於 W



[解答]：

(A)

例題：

已知人的質量為 m，重力加速度為 g，若此人由 1 樓坐到 10 樓，則此人在電梯內的體重，在何時比較輕？

(A)由 1 樓剛起動，加速上升時
(B)往上在 5 樓，電梯等速度運動時
(C)往上快到 10 樓，電梯減速時
(D)往下快到 1 樓，電梯減速時
(E)往下在 5 樓，電梯等時

[解答]：

(C)

例題：

在電梯的天花板下掛一彈簧秤，秤下端懸一 5 kg 的物體，設 $g=10\ m/s^2$

(A)當電梯以等速度 3 m/s 上升時，秤的讀數為 15 N

(B)當電梯以加速度 $1\ m/s^2$ 上升時，秤的讀數為 55 N

(C)當電梯以加速度 $1\ m/s^2$ 下降時，秤的讀數為 40 N

(D)當電梯以加速度 $10\ m/s^2$ 下降時，秤的讀數為 0

(E)當電梯以加速度 $10\ m/s^2$ 上升時，秤的讀數為 10 N

[解答]：

(B)(D)

例題：

作等加速度上升的升降機內吊一彈簧，彈簧另一端懸一物體，此時彈簧伸長量為升降機靜止時彈簧伸長量的 3/2 倍。該升降機的加速度為若干？

[解答]：

$$a=\frac{1}{2}g$$

例題：

有一懸掛重物的彈簧秤懸吊於電梯之天花板下，當電梯以向上 g/2 的等加速度垂直上升時，彈簧之伸長量為 x。則當電梯以向下 g/2 的等加速度下降時，彈簧的伸長量為何？

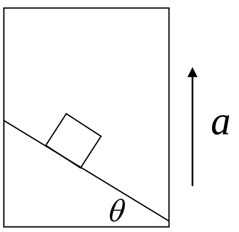
[解答]：

$$\begin{cases} kx - mg = m(\frac{1}{2}g) \\ mg - ky = m(\frac{1}{2}g) \end{cases} \Rightarrow \quad k = \frac{3}{2x}mg$$

$$y = \frac{1}{3}x$$

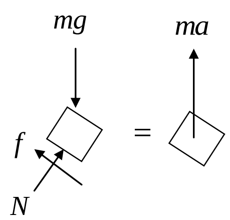
例題：

電梯向上做等加速度 a 的運動，在電梯內質量 m 的木塊相對電梯，靜止在斜面上，如圖所示。則斜面對木塊的正向力為何？



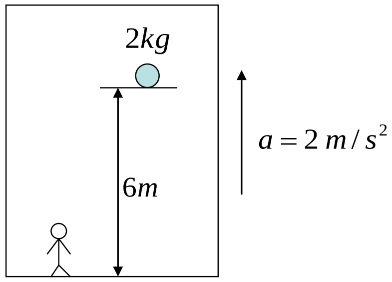
[解答]：

$$\begin{cases} N\sin\theta = f\cos\theta \\ N\cos\theta + f\sin\theta - mg = ma \end{cases}$$



$$N = m(g+a)\cos\theta$$

例題：

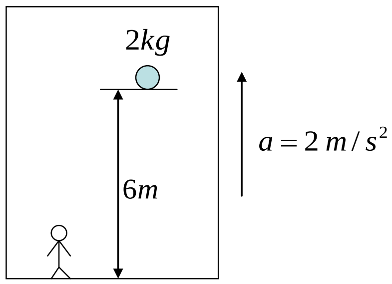


某生靜立於升降機內，而升降機以 2 m/s² 的加速度上升，如圖所示。已知重力加速度 g = 10 m/s²，該生見離地板高度 6 m 處，一質量為 2 Kg 的物體自由落下，則

(1)該生見物體經幾秒到達升降機的地板？

(2)該生見物著地後反彈至原來高度，該物與地板接觸時間為 0.1 秒，則地板施於物的平均作用力為多少？

[解答]：



(1) 球對電梯的相對加速度 $a_1 = g + a = 12$

$$6 = \frac{1}{2} a_1 t^2 \quad \Rightarrow \quad t = 1\,(\text{sec})$$

(2)球下降撞擊地板的速度為

$$v^2 = 2a_1 h \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2 \times 12 \times 6} = 12\,(m/s)$$

球在下降與反彈過程中相對電梯的加速度皆為 $a_1 = g + a = 12$

因此反彈時的速度亦為 $v = 12\,(m/s)$ 才能回到原來位置

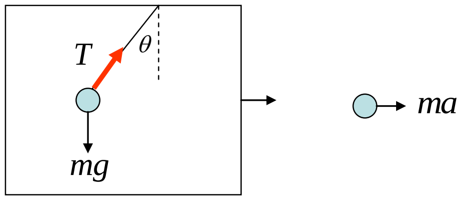
$$(F - ma_1)\Delta t = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

$$(F - ma_1) \times 0.1 = 2[12 - (-12)] \quad \Rightarrow \quad F = 504\,(N)$$

例題：

質量為 m 的小球以線懸於火車車廂的天花板下。當火車以加速度 a 水平進行，而懸線相對於車廂靜止時，懸線與鉛直方向的夾角多大？線的張力為何？

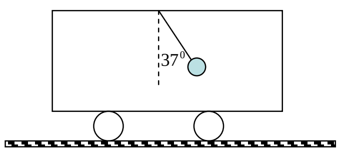
[解答]：



$$\begin{cases} T\cos\theta = mg \\ T\sin\theta = ma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \tan^{-1}(\dfrac{a}{g}) \\ T = m\sqrt{g^2 + a^2} \end{cases}$$

例題：

圖中為一輛兩頭車，車窗密閉。今在車內見車頂一繩索懸質量 5 kg 物體與鉛直線成 37^0 角而呈靜止。若車子為水平進行，則



(A)此車當時做等加速度運動

(B)此時車子向左進行

(C)若將物體質量加大，則該細繩與鉛直線之夾角會變小

(D)此時車子加速度為 3g/4 向左

[解答]：

(A)(D)

例題：

質量 m 的小球以線懸於火車車廂的天花板下，若懸線斷裂耐度為 3 mg，當火車以 a 水平向前行進時，則火車最大加速度若干時，繩恰可不斷裂？

[解答]：

$$a = 2\sqrt{2}g$$

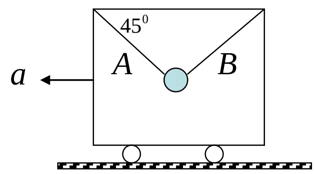
例題：

一車在平直路面上行駛，當車等速前進時，懸於天花板下彈簧伸長 3 cm。當車作等加速度前進時，彈簧向後傾斜而其伸長量為 5 cm。設 g=10 m/s^2，則車之加速度為多少？

[解答]：

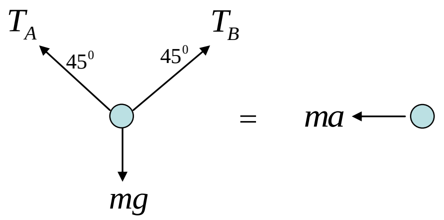
$$a = 13.3\,(m/s^2)$$

例題：



一球質量為 0.5 公斤，由二等長輕繩懸吊於車廂中，如圖所示。車子以 a 之加速度向左行駛，若 A 繩張力為 B 繩張力的三倍，則 a 為多少？

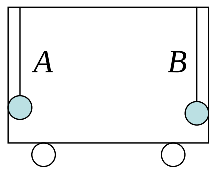
[解答]：



$$\begin{cases} T_A = 3T_B \\ T_A \sin 45^0 + T_B \sin 45^0 - 0.5g = 0 \\ T_A \cos 45^0 - T_B \cos 45^0 = 0.5a \end{cases}$$

$$a = 0.5g$$

例題：



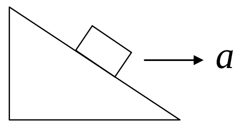
如圖所示，水平地面上有一輛車，當車靜止時，兩球剛好與前後的鉛直壁接觸，且車對壁無作用力。當車以 g/2 的加速度向右行進時，兩條線上的張力 T_A 與 T_B 的比值為多少？

[解答]：

$$\begin{cases} T_A = mg \\ T_B = m\sqrt{g^2 + (\frac{g}{2})^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

例題：

在光滑斜面上有一質量 m 的木塊，今斜面向右做加速度大小為 a 的等加速度運動，如圖所示，則下面有關於木塊運動的敘述，何者正確？



(A)因斜面光滑，故不論 a 的量值為何，木塊皆會相對斜面下滑

(B)因斜面光滑，故不論 a 的量值為何，木塊皆會相對斜面上滑

(C)使木塊相對斜面靜止的加速度 a，只與木塊的質量 m 有關

(D)使木塊相對斜面靜止的加速度 a，只與斜面的傾斜角 θ 有關

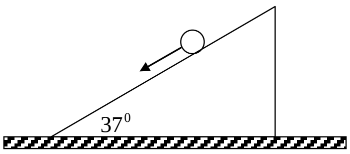
(E)使木塊相對斜面靜止的加速度 a，與木塊的質量 m 及斜面的傾斜角 θ 有關

[解答]：

(D)

例題：

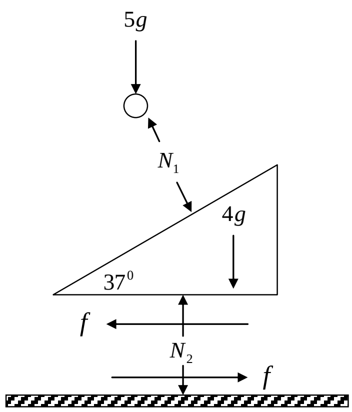
如圖所示，質量 4 公斤、斜角 37^0 的光滑斜面三角形木塊，其上放置質量 5 公斤的物體。若物體沿光滑斜面下滑，欲使木塊恰保持靜止，則三角形木塊底面與地面間的靜摩擦係數至少應若干？



[解答]：

$$\begin{cases} N_1 = 5g\cos 37^0 \\ N_2 - N_1\cos 37^0 - 4g = 0 \\ N_1 \sin 37^0 - f = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1 = 4g \\ N_2 = \dfrac{36}{5}g \\ f = \dfrac{12}{5}g \end{cases}$$

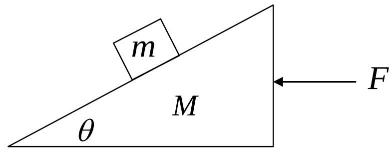


$$f \le \mu_s N_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{12}{5}g \le \mu_s \frac{36}{5}g$$

$$\mu_s \ge \frac{1}{3}$$

例題：

如圖所示，設所有摩擦力均可忽略不計，則欲使質量 m 靜止於 M 時，求

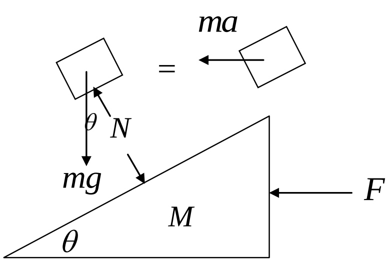


(1) M 之加速度為何？ **(2)**水平推 M 之力為何？

[解答]：

(1)

$$\begin{cases} N\cos\theta = mg \\ N\sin\theta = ma \end{cases} \Rightarrow \quad a = g\tan\theta$$

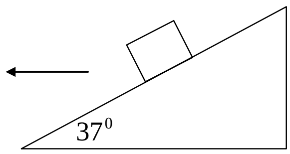


(2)因質量 m 靜止於 M ，兩物質可視為一體

$$F = (m+M)a = (m+M)g\tan\theta$$

例題： (摩擦力方向假設錯誤的例子)

如圖所示，質量 10 公斤的物體置於三角形木塊斜面上，當三角形木塊以 8 m/s^2 沿水平光滑面向左行進，$(g = 10\ m/s^2)$



(1)欲使物體不沿斜面滑動，物體與斜面間的摩擦力應多大？

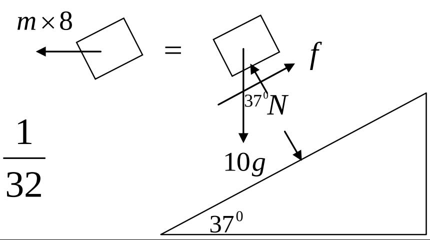
(2)此時最小靜摩擦係數應為若干？

[解答]：

(1)

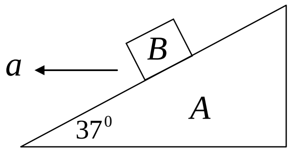
$$\begin{cases} N\cos 37^0 - 10g + f\sin 37^0 = 0 \\ N\sin 37^0 - f\cos 37^0 = 10\times 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = 128 \\ f = -4 \end{cases}$$

(負號表示摩擦力方向假設錯誤)



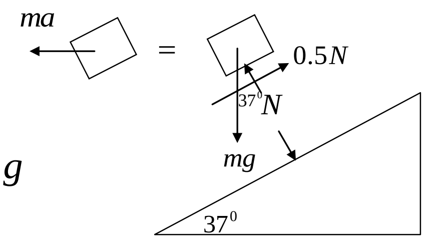
(2) $|f| \le \mu_s N \quad \Rightarrow \quad 4 \le \mu_s \times 128 \quad \Rightarrow \quad \mu_s \ge \dfrac{1}{32}$

例題：

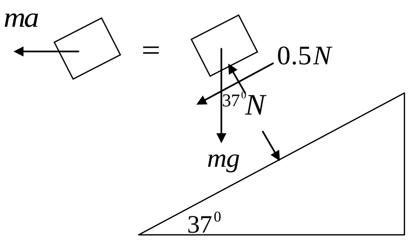


如圖，A、B 兩物間的靜摩擦係數為 0.5，重力加速度為 g，今 A 向左作等加速度運動，而 B 對 A 為靜止。求 A 的加速度最小值及最大值？

[解答]：



$$\begin{cases} N\cos 37^0 - mg + 0.5N\sin 37^0 = 0 \\ N\sin 37^0 - 0.5N\cos 37^0 = ma \end{cases} \Rightarrow \quad a = \frac{2}{11}g$$

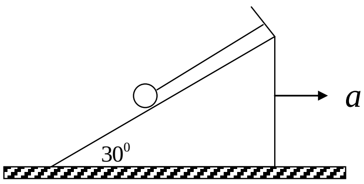


$$\begin{cases} N\cos 37^0 - mg - 0.5N\sin 37^0 = 0 \\ N\sin 37^0 + 0.5N\cos 37^0 = ma \end{cases} \Rightarrow \quad a = 2g$$

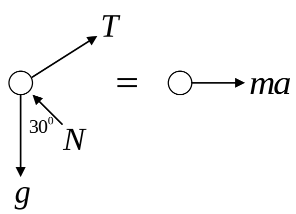
$$\frac{2}{11}g \le a \le 2g$$

例題：

如圖所示，質量 1 公斤的小球用繩掛在傾角 30^0 之光滑斜面上。斜面體以 a 的加速度向右做等加速度直線運動，當小球恰離開斜面時，此時斜面體的加速度 **a** 為何？



[解答]：



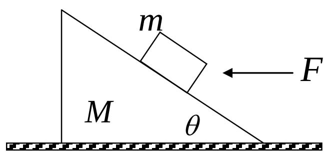
$$\begin{cases} T\cos 30^0 - N\sin 30^0 = ma \\ T\sin 30^0 - N\cos 30^0 - mg = 0 \end{cases}$$

$$\tan 30^0 = \frac{N\cos 30^0 + mg}{N\sin 30^0 + ma}$$

當 $N = 0 \qquad a = \sqrt{3}g$

例題：

如圖所示，質量為 m 的物體靜止於粗糙斜面上，斜面靜止於粗糙地面上。當用一水平定力 F 推物體時，物體與斜面仍保持靜止，下列敘述何者錯誤？



(A)物體所受的靜摩擦力一定比原來小

(B)地面對斜面的正向力一定不變

(C)斜面所受地面靜摩擦力一定比原來增大

(D)物體所受靜摩擦力的方向可能發生變化

(E)當增大 F，有可能斜面已開始對地滑動而 m 卻仍相對於斜面靜止

[解答]： (A)

(A)(D)

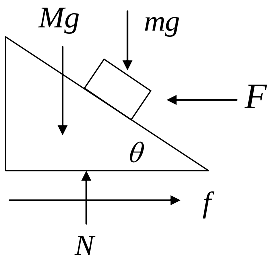
原先物體 m 靜止時的摩擦力方向向上 $f_1 = mg\sin\theta$

水平定力 F 推物體後，摩擦力方向可能向上、向下

摩擦力方向向上 $f_2 = mg\sin\theta - F\cos\theta$

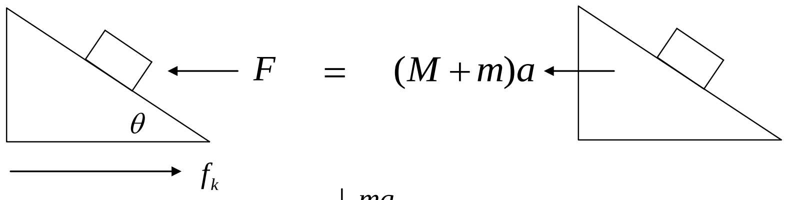
摩擦力方向向下 $f_2 = F\cos\theta - mg\sin\theta$ $f_2 >=< f_1$

(B)(C)

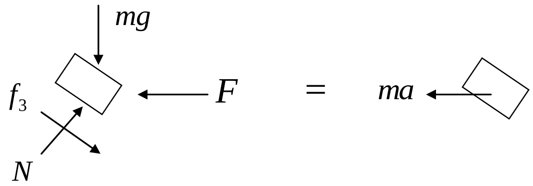


$$\begin{cases} N = (M+m)g \\ f = F \end{cases}$$

(E)若斜面已開始對地滑動而 m 卻仍相對於斜面靜止



$$a=\frac{F-f_k}{M+m}$$

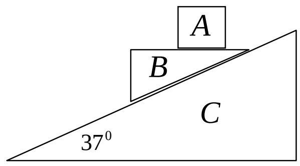


$$\begin{cases} N=mg\cos\theta+F\sin\theta \\ F-f_3\cos\theta=ma \end{cases} \Rightarrow f_3=\frac{MF+mf_k}{(M+m)\cos\theta}$$

$$f_3\le\mu_s N \Rightarrow \frac{MF+mf_k}{(M+m)\cos\theta}\le\mu_s(mg\cos\theta+F\sin\theta)$$

$$F\le\frac{\mu_s(M+m)mg\cos\theta\cos\theta-mf_k}{M-\mu_s(M+m)\cos\theta\sin\theta}$$ **即有可能**

例題：



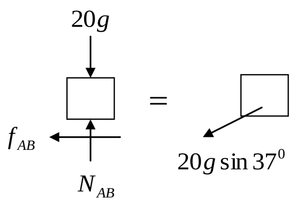
如圖，A、B 兩木塊質量分別為 20 kg 及 30 kg，二者相對靜止，在光滑且固定之斜面 C 上滑下， g=10 m/s^2，則

(1) A、B **間鉛直方向相互作用之力為多少？**

(2) B、C **間互相作用力為多少？**

[解答]：

(1)

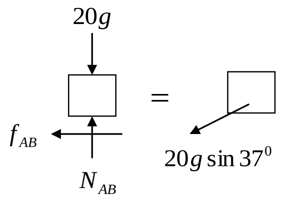


$$\begin{cases} N_{AB}-20g=-(20g\sin 37^0)\sin 37^0 \\ f_{AB}=(20g\sin 37^0)\cos 37^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_{AB}=128 \\ f_{AB}=96 \end{cases}$$

37^0

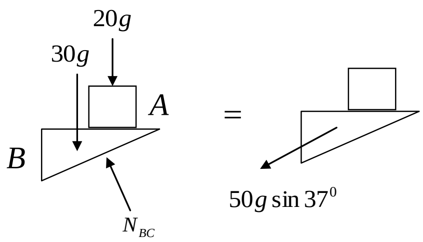
[解答]：

(1)



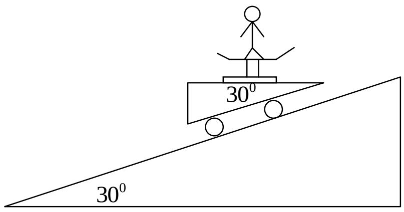
$$\begin{cases} N_{AB}-20g=-(20g\sin 37^0)\sin 37^0 \\ f_{AB}=(20g\sin 37^0)\cos 37^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_{AB}=128\,(N) \\ f_{AB}=96\,(N) \end{cases}$$

(2)



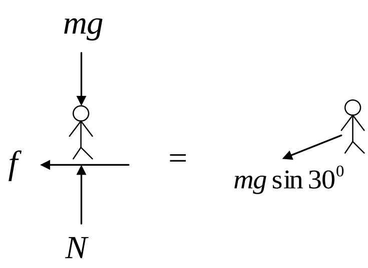
$$\begin{cases} 50g\sin 37^0=50g\sin 37^0 \\ N_{BC}-50g\cos 37^0=0 \end{cases} \Rightarrow N_{BC}=400\,(N)$$

例題：



一人站在一滑車的磅秤上，滑車則在一斜角為 30^0 之光滑斜面上滑下。設此人的質量為 60 kg，則滑車上的磅秤讀數為多少？

[解答]：

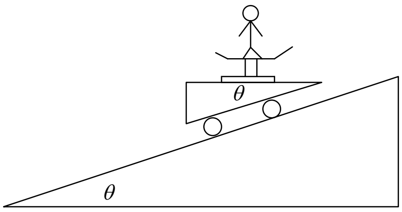


$$\begin{cases} N-mg=-(mg\sin 30^0)\sin 30^0 \\ f=(mg\cos 30^0)\cos 30^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N=45g \\ f=45g \end{cases}$$

磅秤讀數：$45\,kg$

例題：

質量 80 kg 的人站在磅秤上，磅秤固定在小車上，人、磅秤、小車沿光滑且固定之斜面滑下，人相對於磅秤讀數為 60 kgw，則 θ 等於幾度？

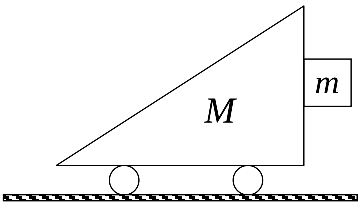


[解答]：

30^0

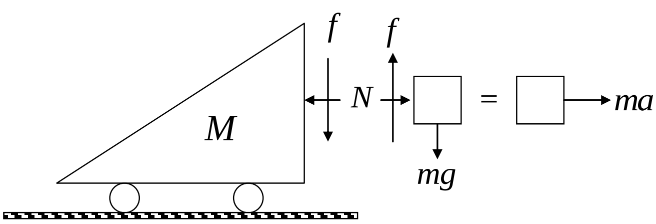
例題：

如圖，質量為 M 之小車前有一木塊，質量為 m。若木塊與小車間之靜摩擦係數為 μ_s，今欲使木塊不致落下，則小車之加速度至少多少？



[解答]：

$$\begin{cases} N = ma \\ f - mg = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = ma \\ f = mg \end{cases}$$



$$f \le \mu_s N \quad \Rightarrow \quad mg \le \mu_s ma \quad \Rightarrow \quad a \ge \frac{g}{\mu_s}$$

例題：

升降梯的高度為 8 米，向上運動，以 6 m/s^2 減速中，此時天花板上有一物體脫落，求該物體經幾秒後落到升降梯的地板上。 $(g=10\,m/s^2)$

[解答]：

物體對地板的相對加速度為 $a=-6-10=-16\,(m/s^2)$

$$s=\frac{1}{2}at^2 \quad\Rightarrow\quad -8=\frac{1}{2}\times(-16)t^2 \quad\Rightarrow\quad t=1\,(\text{sec})$$

例題：

在地面上有一週期為 1 秒的單擺，將其移至一升降機內。當升降機以 g/4 的等加速度上升時，由升降機內見單擺之週期為幾秒？

[解答]：

$$F-mg=m(\frac{g}{4}) \quad\Rightarrow\quad F=\frac{5}{4}mg \qquad g'=\frac{5}{4}g$$

$$\frac{T_1}{T'}=\sqrt{\frac{g'}{g_1}} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{T'}=\sqrt{\frac{5}{4}} \quad\Rightarrow\quad T'=\frac{2}{\sqrt{5}}\,(\text{sec})$$

例題：

在下列何種情況下，單擺的週期將會改變？

(A)改變擺錘質量

(B)將其移到月球上

(C)將其置於沿水平等加速度前進的汽車內

(D)將其懸掛於 5 m/s 等速上升的電梯中

(E)將其懸掛於 5 m/s^2 等加速度下降的電梯中

[解答]：

(B)(C)(E)

例題：

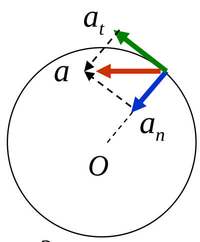
若物體在空中落下時，所受阻力與其速度平方成正比。今一質量 10 公斤之物在空中自由落下之終端速度為 7 m/s，則此物體下落速度為 6 m/s 時之加速度大小為多少？($g = 9.8\ m/s^2$)

[解答]：

第 4-4 節 等速率圓周運動與向心力

(1)切線速度：

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r\Delta\theta}{\Delta t} = r \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = r\omega = \frac{2\pi r}{T} \quad (m/s)$$



(2)加速度： $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$ $\quad |\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}_t|^2 + |\vec{a}_n|^2}$

(a)切線加速度：改變切線方向速率

$$a_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r\Delta\omega}{\Delta t} = r \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = r\alpha \quad (m/s^2)$$

(b)法線(向心)加速度：改變運動方向，必指向圓心。

$$a_n = r\omega^2 = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \quad (m/s^2)$$

(3)向心力： $F = ma_n = mr\omega^2 = m\frac{v^2}{r} = m\frac{4\pi^2 r}{T^2} \quad (N)$

例題：

一物體做等速率圓周運動，速率為 v，在繞行半周時間內的平均速度大小為何？

[解答]：

$$v = \frac{2\pi r}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi r}{v}$$

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{r}{\frac{T}{2}} = \frac{r}{\frac{\pi r}{v}} = \frac{v}{r}$$

例題：

一物體在光滑平面上繞一定點做半徑 R、週期 T 的等速率圓周運動，則

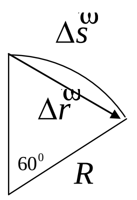
(1) T/6 **的時間內，物體平均速度大小為何？**

(2) T/6 **的時間內，物體平均速率為何？**

(3) T/6 **的時間內，物體平均加速度大小為何？**

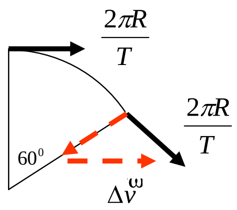
(4) T/6 **的時間內，物體瞬時加速度大小為何？**

[解答]：



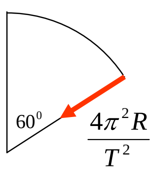
(1) $|\vec{v}|=\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right|=\frac{R}{\frac{T}{6}}=\frac{6R}{T}$

(2) $|\vec{v}|=\left|\frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t}\right|=\frac{R\frac{\pi}{3}}{\frac{T}{6}}=\frac{2\pi R}{T}$



(3) $|\Delta\vec{v}|=\frac{2\pi R}{T}$　　$|\vec{a}|=\left|\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\right|=\frac{\frac{2\pi R}{T}}{\frac{T}{6}}=\frac{12\pi R}{T^2}$

(4) $a=\frac{4\pi^2 R}{T^2}$



例題：

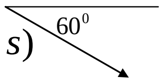
一時針之秒針長 15 公分。試求秒針之針尖

(1) 0~20 秒內之平均速度　　**(2)** 第 20 秒之瞬時速度

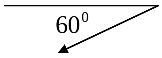
(3) 0~30 秒內之平均加速度　**(4)** 第 30 秒之加速度

[解答]：

(1) $|\vec{v}| = \left|\dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\right| = \dfrac{\sqrt{15^2 + 15^2 - 2\times 15^2 \cos 120^0}}{20} = \dfrac{15\sqrt{3}}{20} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\ (cm/s)$



(2) $|\vec{v}| = \dfrac{2\pi R}{T} = \dfrac{2\pi\times 15}{60} = \dfrac{\pi}{2}\ (cm/s)$



(3) $|\Delta \vec{v}| = \dfrac{4\pi R}{T} = \pi$，$|\vec{a}| = \left|\dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}\right| = \dfrac{\pi}{30}\ (cm/s^2)$

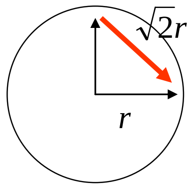
(4) $a = \dfrac{4\pi^2 R}{T^2} = \dfrac{4\pi^2 \times 15}{60^2} = \dfrac{\pi^2}{60}\ (cm/s^2)$

例題：

有一個精確的時鐘，在經過 1 時又 1 刻鐘的時距內，分針尖端的平均速度大小為瞬時速度大小的若干倍？

[解答]：

$$|\vec{v}_{平均}| = \left|\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\right| = \frac{\sqrt{2}r}{75(\text{min})}$$



$$|\vec{v}_{瞬時}| = \left|\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\right| = \frac{2\pi r}{60(\text{min})}$$

$$\frac{|\vec{v}_{平均}|}{|\vec{v}_{瞬時}|} = \frac{\dfrac{\sqrt{2}r}{75}}{\dfrac{2\pi r}{60}} = \frac{2\sqrt{2}}{5\pi}$$

例題：

一物體做等速率圓周運動，其向心加速度大小為 a，在繞行半周時間內的平均加速度大小為何？

[解答]：

$$\begin{cases} v = \dfrac{2\pi r}{T} \\ a = \dfrac{4\pi^2 r}{T^2} \end{cases} \Rightarrow \quad a = \frac{2\pi v}{T}$$

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{2v}{\frac{T}{2}} = \frac{4v}{T} = \frac{2}{\pi} a$$

例題：

沿曲線運動的物體

(A)向心力關係式 $F = m\dfrac{v^2}{R}$，適用於任何時刻

(B)路徑越彎曲，曲率越大

(C)路徑越彎曲，曲率半徑越大

(D)若速率不變，則向心力越大處，路徑的曲率半徑越大

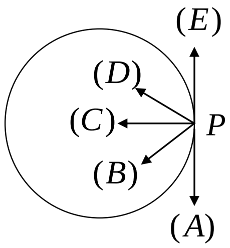
(E)物體所受淨力必為零

[解答]：

(A)(B)

例題：

一正在上坡中腳踏車車輪，做順時針方向的圓周運動，如圖所示。若切線速率越來越慢，則在 P 點處的加速度方向應為何者？



[解答]：

(D)

例題：

一質點做半徑 32 公尺的圓周運動，其移動的路徑長 S 與時間的關係為 $S = 2t^2$。則質點在第 2 秒時的加速度大小為多少？

[解答]：

$$v = \frac{dS}{dt} = 4t \qquad a_t = \frac{d^2S}{dt^2} = 4 \qquad a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{16t^2}{32} = \frac{t^2}{2}$$

$$a\big|_{t=2} = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{4^2 + (\frac{t^2}{2})^2}\Bigg|_{t=2} = 2\sqrt{5}\ (m/s)$$

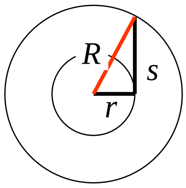
例題：

某人手持濕而張開的傘，傘柄鉛直豎立並做週期 π 秒的等速率圓周運動，使水滴飛離傘面而落於地上。若傘緣半徑 0.5 公尺，離地為 1.25 公尺，$g=10m/s^2$，則水滴落地時在地面呈一圓形，此圓形半徑若干公尺？

[解答]：

水滴飛離傘面之水平拋射速度為 $v=\dfrac{2\pi r}{T}=\dfrac{2\pi\times 0.5}{\pi}=1$

水滴落地時間：$1.25=\dfrac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t=0.5$



水平拋射距離：$s=vt=1\times 0.5=0.5$

水滴落地時呈圓形之半徑：$R=\sqrt{s^2+r^2}=0.5\sqrt{2}\ (m)$

例題：

一質量為 m 的物體，以每秒 f 轉的轉速，在一光滑的水平面上沿一半徑為 r 的圓形路徑做等速率圓周運動。此物體運行 1/2 圈時

(1)所受衝量大小為何？

(2)所受平均力大小為何？

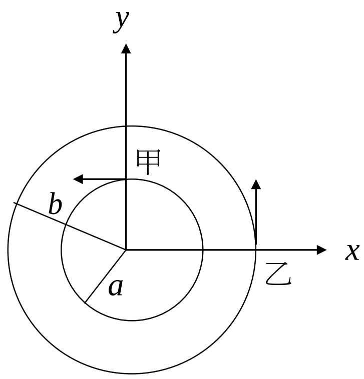
[解答]：

(1) $v=r(2\pi f)=2\pi rf$　　所受衝量大小：$\Delta(mv)=2mv=4\pi rfm$

(2) 平均力大小 $\overline{F}=\dfrac{\Delta(mv)}{\Delta t}=\dfrac{4\pi rfm}{\dfrac{1}{2f}}=8\pi^2 rfm$

例題：

甲、乙兩質點之速率均為 v，分別在半徑為 a 和 b 的同心圓周上做等速率圓周運動。若在某一瞬間，質點甲、乙的速度方向如圖所示，則在此瞬間兩質點的相對加速度大小為何？



[解答]：

$$\vec{a}_{甲}=-\frac{v^2}{a}\vec{j} \qquad \vec{a}_{乙}=-\frac{v^2}{b}\vec{i}$$

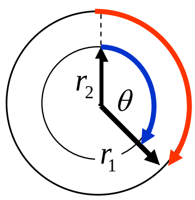
$$\vec{a}_{甲/乙}=-\frac{v^2}{a}\vec{j}-(-\frac{v^2}{b}\vec{i})=\frac{v^2}{b}\vec{i}-\frac{v^2}{a}\vec{j}$$

$$\left|\vec{a}_{甲/乙}\right|=\frac{v^2}{ab}\sqrt{a^2+b^2}$$

例題：

甲、乙兩人沿圓形軌道同向賽跑，甲沿半徑 r_1 的外跑道跑，乙沿半徑 r_2 的內跑道跑。設甲以 v 的速率經過乙時，乙開始起跑。此後甲始終以 v 的速率跑，而乙則以等角加速度追甲。則在乙追及甲時，乙的速率為何？

[解析]：



甲、乙兩人所花時間 t 及角位移 θ 相等

甲位移： $r_1\theta=vt$ 乙位移： $r_2\theta=\frac{1}{2}(r_2\alpha)t^2$

$$\frac{r_1\theta}{r_2\theta}=\frac{vt}{\frac{1}{2}(r_2\alpha)t^2} \Rightarrow \alpha t=\frac{2v}{r_1}$$

乙追及甲時，乙的速率： $v_{乙}=r_2\omega=r_2(\alpha t)=\frac{2vr_2}{r_1}$

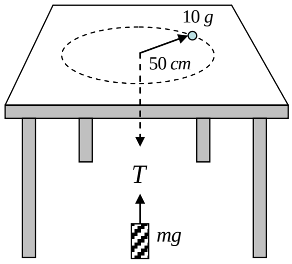
例題：

一細線長 50 cm ，一端繫 10 g 的小錘，另一端固定於光滑水平桌面上做為圓心。今以 3 週/秒 的頻率，在該水平桌面上使細線及小錘轉動時，細線恰行斷裂。若以此細線鉛直懸吊一物，最大可吊多少質量？($g=10m/s^2$)

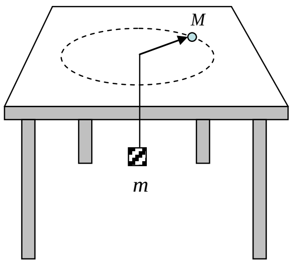
[解答]：

$$T = mr\omega^2 = 0.01\times0.5\times(3\times2\pi)^2 = 1.8\,(N)$$

$$T = mg = 1.8\,(N) \quad\Rightarrow\quad m = 0.018\,(Kg)$$



例題：



如圖所示，細繩一端繫著質量 M=0.6 公斤的物體，靜止在水平桌面，另一端通過光滑小孔吊著質量 m = 0.3 公斤的物體。 M 的中點與圓孔距離為 r = 0.2 公尺，並知 M 和水平桌面的最大靜擦力為 2 牛頓。現使此物體 M 繞中心軸旋轉，問角速度 ω 在什麼範圍，m 會處於靜止狀態？ $(g = 10m/s^2)$

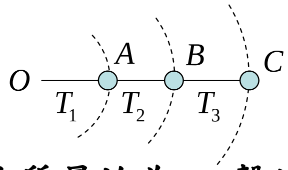
[解答]：

欲往外滑動： $2+0.3g = 0.6(0.2\times\omega^2)$ $\quad \omega = \frac{5}{3}\sqrt{15}$

欲往內滑動： $0.3g-2 = 0.6(0.2\times\omega^2)$ $\quad \omega = \frac{5}{3}\sqrt{3}$

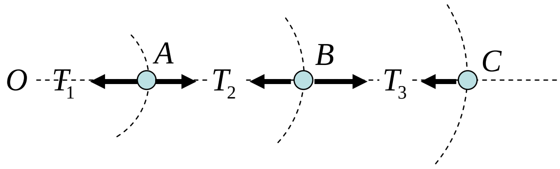
m 會處於靜止狀態： $\frac{5}{3}\sqrt{3} \le \omega \le \frac{5}{3}\sqrt{15}$

例題：



如圖所示，A，B，C 三物質量均為 m 繫於繩上，三段繩長均為 L。今以 O 點作為圓心做等速率圓周運動，則繩子張力比 $T_1:T_2:T_3$＝？

[解答]：



$$\begin{cases} T_3 = m(3L)\omega^2 = 3mL\omega^2 \\ T_2 - T_3 = m(2L)\omega^2 \\ T_1 - T_3 = m(L)\omega^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_3 = 3mL\omega^2 \\ T_2 = 5mL\omega^2 \\ T_1 = 6mL\omega^2 \end{cases}$$

$$T_3 : T_2 : T_1 = 6:5:3$$

例題：

自然長度為 20 cm 的彈簧，一端懸掛 50 g 的物體，以另一端為中心在光滑水平桌面做圓周運動。當頻率為 4 次/秒 時彈簧長 24 cm；若頻率為 6 次/秒 時彈簧長為若干？

[解答]：

$$F = m\frac{4\pi^2 r}{T^2} = m4\pi^2 rf^2$$ 設彈簧彈性係數為 k

$$\begin{cases} \dfrac{(24-20)}{100}k = 0.05\times 4\pi^2 \times 0.24\times 4^2 \\ \dfrac{(x-20)}{100}k = 0.05\times 4\pi^2 \times \dfrac{x}{100}\times 6^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{24-20}{x-20} = \frac{0.24\times 4^2}{\dfrac{x}{100}\times 6^2}$$

$$x = 32\,(cm)$$

例題：

彈簧自然長度為 L_0，彈力常數為 k，一端綁一質量為 m 的球，一端固定於光滑水平桌上做等速率圓周運動，角速度為 ω。則彈簧的全長為何？

[解答]：

$$mr\omega^2 = k\Delta L$$

$$mL\omega^2 = k(L - L_0)$$

$$\frac{m\omega^2}{k}L = L - L_0 \qquad (1 - \frac{m\omega^2}{k})L = L_0$$

$$L = \frac{kL_0}{k - m\omega^2}$$

例題：

一彈簧原長為 L，一端固定，另一端繫一質量 m 的物體在水平光滑桌面上做等速率圓周運動。當其旋轉週期為 T 時，彈簧長度為 9L/8，若彈簧長度為 4L/3 時，求

(1)向心力大小 **(2)旋轉週期**

(3)切線速率 **(4)彈簧彈力常數**

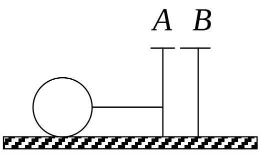
[解答]：

(4) $k(\frac{9L}{8} - L) = m\frac{4\pi^2 \frac{9L}{8}}{T^2} \Rightarrow k = \frac{36\pi^2 m}{T^2}$

(1) $F = k\frac{L}{3} = \frac{12\pi^2 Lm}{T^2}$ **(2)** $F = \frac{12\pi^2 Lm}{T^2} = \frac{4\pi^2 \frac{4L}{3} m}{T_1^2} \Rightarrow T_1 = \frac{2}{3}T$

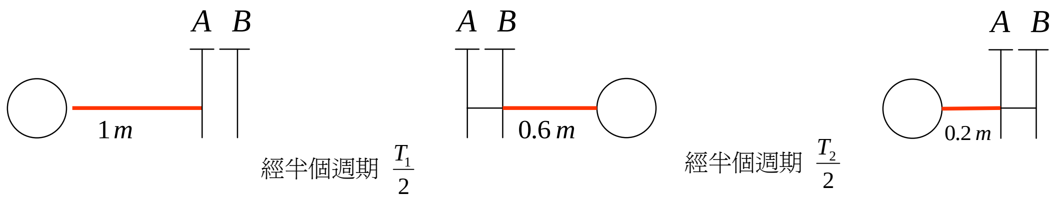
(3) $F = \frac{12\pi^2 Lm}{T^2} = m\frac{v^2}{\frac{4}{3}L} \Rightarrow v = \frac{4\pi L}{T}$

例題：



如圖所示，在光滑的水平面上釘相距 40 公分的兩個釘子 A 和 B，長 1 公尺的細繩一端繫著質量為 0.4 公斤的小球，另一端固定在釘子 A 上。開始時，小球和釘子 A、B 在同一直線上，球始終以 2 m/s 的速率在水平面上做等速率圓周運動。若細繩能承受的最大拉力為 4 牛頓，則從開始到細繩斷開鎖經歷的時間為多少秒？

[解答]： $F = m\dfrac{v^2}{r} \le 4 \;\Rightarrow\; 0.4\dfrac{2^2}{r} \le 4 \;\Rightarrow\; r \ge 0.4\,(m)$



$$T_1 = \frac{2\pi r_1}{v} = \frac{2\pi \times 1}{2} = \pi \qquad T_2 = \frac{2\pi r_2}{v} = \frac{2\pi \times 0.6}{2} = 0.6\pi$$

$$\Delta t = \frac{T_1}{2} + \frac{T_2}{2} = 0.8\pi$$

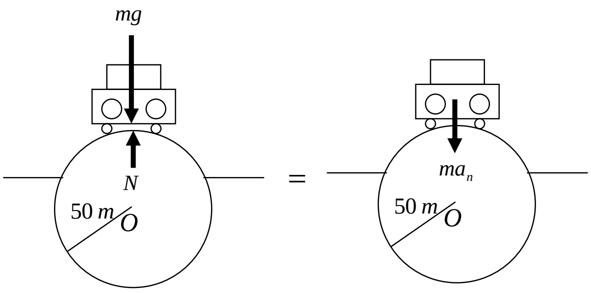
例題：

一小山丘的頂部附近可視為一半徑為 50 m 的球面。某人開車越過山頂時，車速必須小於______km/h ，才不至於在山頂飛離地面？(g=10 m/s^2)

[解答]：

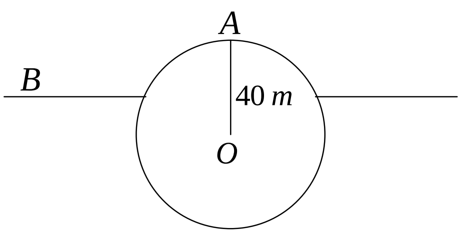
$$mg - N = ma_n = m\frac{v^2}{50} \quad \Rightarrow \quad N = mg - m\frac{v^2}{50} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad v^2 \leq 50g$$

$$v \leq \sqrt{50\times10}\ (m/s) = \sqrt{50\times10} \times \frac{60\times60}{1000}\ (Km/hr) = 36\sqrt{5}\ (Km/hr)$$



例題：

如圖所示，一圓形山丘 A 點為山丘的最高點，此圓形山丘的曲率半徑為 40 m 。今有一體重 50 Kgw 的滑雪者要越過此山丘，假設空氣阻力及滑雪道的摩擦力皆可忽略，A 點與 B 點的高度差為 13.8 m 。 若滑雪者由 B 點出發，通過 A 點恰能水平飛出。則他在 B 點的最小速率為多少？(g=10 m/s^2)



[解答]：

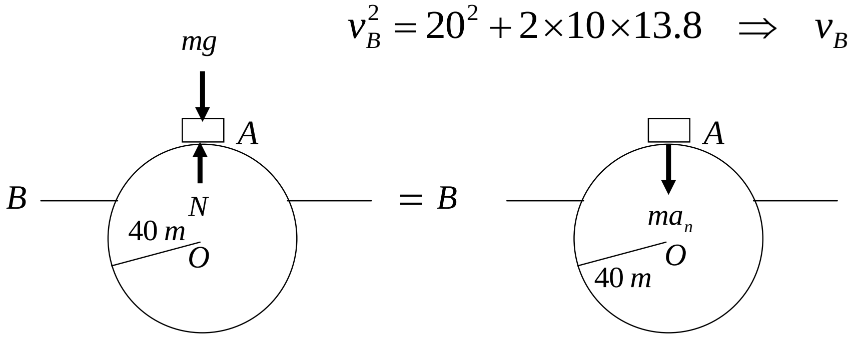
先求出滑雪者越過 A 點速率

$$mg - N = ma_n = m\frac{v^2}{40} \Rightarrow N = mg - m\frac{v^2}{40} \geq 0 \Rightarrow v^2 \leq 40g$$

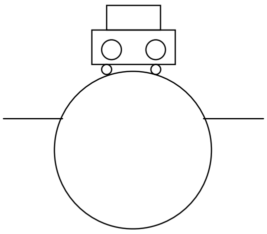
$$v \leq \sqrt{40\times10}\ (m/s) = 20\ (m/s)$$

由力學能守恆 $\frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgh \Rightarrow v_B^2 = v_A^2 + 2gh$

$$v_B^2 = 20^2 + 2\times10\times13.8 \Rightarrow v_B = 26\ (m/s)$$



例題：



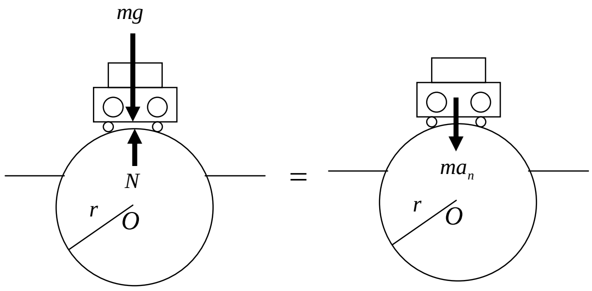
如圖所示，當汽車通過拱橋頂點的速度為 10 m/s，車對橋頂的正向力為車重的 3/4。如果要使汽車在粗糙的橋面行駛至橋頂時，恰不受摩擦力作用，則汽車通過橋頂的速度應為多少？

[解答]：

$$mg - \frac{3}{4}mg = ma_n = m\frac{10^2}{r} \Rightarrow r = \frac{400}{g}$$

$$mg = ma_n = m\frac{v^2}{\frac{400}{g}}$$

$$v = 20\ (m/s)$$



例題：

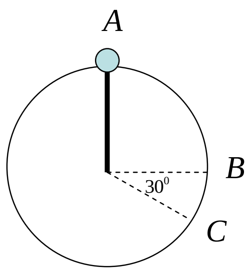
線長 L，懸一物質量 m 做鉛直面圓周運動。已知在頂點 A 點的速率為 $\sqrt{2gL}$，達 C 點之瞬間速率為 $\sqrt{5gL}$，則達 C 點瞬間

(1)角速度為何？

(2)法線加速度為何？

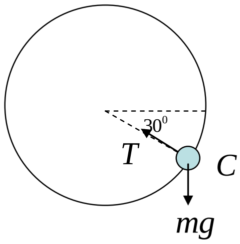
(3)切線加速度為何？

(4)擺繩的張力為何？



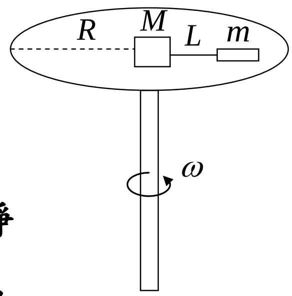
[解答]：

(1) $\omega = \dfrac{\sqrt{5gL}}{L} = \sqrt{\dfrac{5g}{L}}$　　(2) $a_n = L\omega^2 = 5g$



(3)(4) $\begin{cases} mg\cos 30^0 = ma_t \\ T - mg\sin 30^0 = ma_n \end{cases}$　　$\begin{cases} a_t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}g \\ T = \dfrac{11}{2}mg \end{cases}$

例題：

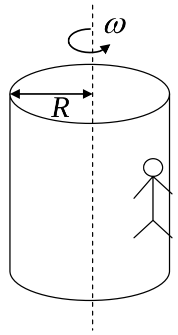


如圖所示，一圓盤可以繞其鉛直軸在水平面內轉動，圓盤半徑為 R，甲、乙兩物體質量分別為 M 與 m（M>m），它們與圓盤之間的最大靜摩擦力均為正向力的 μ 倍，兩物體用一根長為 L（L<R）的輕繩連在一起。若將甲物體放在轉軸位置上，甲、乙之間連線剛好沿半徑方向被拉直，要使兩物體與圓盤之間不發生相對滑動，則轉盤旋轉的角速度最大值不得超過多少？(兩物體均視為質點)

[解答]：

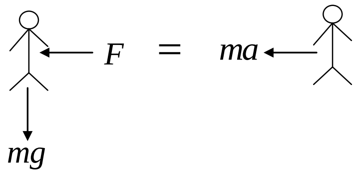
$$mL\omega^2 \le \mu(M+m)g \quad \Rightarrow \quad \omega \le \sqrt{\frac{\mu(M+m)g}{mL}}\ (rad/s)$$

例題：



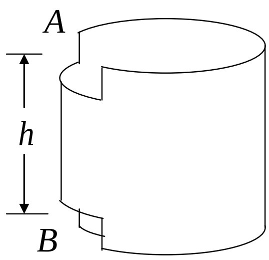
質量 m 的人緊貼圓柱桶內壁，隨之快速轉動。已知此人與圓柱內壁的靜摩擦係數為 μ，則欲使人貼於內壁而不滑下時，此圓柱桶轉動的角速度至少為多少？

[解答]：



$$\begin{cases} \mu F \ge mg \\ F = mR\omega^2 \end{cases} \Rightarrow \quad \mu mR\omega^2 \ge mg \quad \Rightarrow \quad \omega \ge \sqrt{\frac{g}{\mu R}}$$

例題：



如圖，鉛直圓筒內壁光滑，半徑 R，頂部有入口 A，在 A 的正下方 h 處有出口 B。一質量為 m 的小球從入口 A 沿切線方向的水平槽射入圓筒內，要使球從 B 處飛出，小球射進入口 A 的速度 v_0 應滿足什麼條件？在運動過程中，球對筒的正向力有多大？

[解答]：

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

在t 時間內，小球需恰轉 n 圈才能從 B 出去

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = nT = n\frac{2\pi R}{v_0} (n = 1,2,3,\Lambda) \quad \Rightarrow \quad v_0 = n\pi R\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$N = m\frac{v_0^2}{R} = \frac{2n^2\pi^2 Rmg}{h}$$

例題：

一物體沿一圓弧形軌道自上端以等速下滑，下列敘述何者正確？

(A)物體與軌道間的摩擦力大小不變

(B)物體所受的合力為零

(C)因等速下滑，故物體動量守恆

(D)物體所受的合力大小不變，但方向改變

(E)物體所受的合力大小會改變，方向也會改變

[解答]：

(D)

例題：

有關等速率圓周運動的敘述何者正確？

(A)是一種曲線變加速度動

(B)是一種等速度運動

(C)同時具有切線加速度與法線加速度

(D) 1/6 週期內的速度變化量值等於瞬時速率

(E)任一時距的平均速率均相同

[解答]：

(A)(D)(E)

例題：

設地球為正球體，其半徑為 R，自轉週期為 T，下列敘述何者正確？

(A)地球上任一點對地軸的角速度都相同

(B)赤道上的自轉切線速度值為 $\frac{2\pi R}{T}$

(C)赤道處的法線加速度值為 g

(D)緯度 60^0 處的自轉切線速率為 $\frac{\pi R}{T}$

(E)緯度 60^0 處的向心加速度值為 $\frac{g}{2}$

[解答]：

(A)(B)(D)

例題：

有關等速率圓周運動的敘述何者正確？

(A)因為等速率，所以加速度為零

(B)屬於變速度運動

(C)屬於變加速度運動

(D)如果週期不變，半徑增倍，則速率減半

(E) 1/4 週期內的速度變化量值是瞬時速率的 2 倍

[解答]：

(B)(C)

例題：

有關等速率圓周運動的敘述何者錯誤？

(A)由圓心連至質點的直線，於等時間中掃過相同的面積

(B)這個運動所需之力，其量值與軌道半徑平方及角速度之乘積成正比

(C)質點加速度的量值及動量的量值均為定值

(D)質點繞圓心的角速度為定值

(E)質點的速度與其加速度的內積恆為正值

[解答]：

(B)(E)

例題：

一質點以輕繩繫之，在鉛直面上做圓周運動，下列敘述何者正確？

(A)切線加速度恆不為零

(B)法線加速度恆不為零

(C)合力方向指向圓心

(D)最高點與最低點處，質點所受的合力量值不同

(E)質點上升過程，輕繩張力逐漸減小；下降過程，張力逐漸增加

[解答]：

(B)(D)(E)

錐動擺

擺長為 L 的擺球沿水平面做等速率圓周運動，稱為錐動擺。

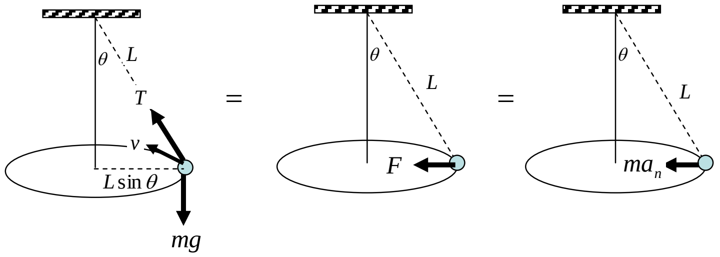
(1)擺球所受力量：重力 mg 、繩的張力 T $\quad T\cos\theta = mg$

(2)合力：向心力 $F = T\sin\theta = mg\tan\theta$

(3)向心加速度： $F = mg\tan\theta = ma_n \quad \Rightarrow \quad a_n = g\tan\theta$

(4)切線速度： $a_n = g\tan\theta = \dfrac{v^2}{L\sin\theta} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{gL\tan\theta\sin\theta}$

(5)擺動週期： $a_n = g\tan\theta = \dfrac{4\pi^2(L\sin\theta)}{T^2} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L\cos\theta}{g}}$



例題：

如圖，錐動擺為一質量 m 的小球繫於輕繩的下端，繩的上端固定，小球以等速率做水平圓周運動，輕繩在空中掃轉一圓錐面。若已知繩長為 L ， 繩和鉛直方向的夾角 θ，則

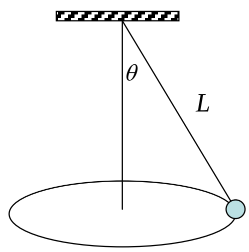
(A)繩上張力為 $mg\sec\theta$

(B)小球轉動的軌道半徑為 $L\sin\theta$

(C)小球的軌道速率為 $\sqrt{gL\tan\theta}$

(D)小球的切線加速度大小為 $g\tan\theta$

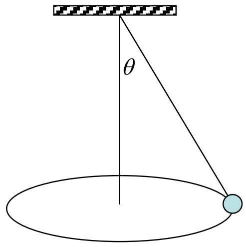
(E)小球運轉週期為 $2\pi\sqrt{L\cos\theta/g}$



[解答]：

(A)(B)(E)

例題：



如圖所示，使單擺的擺錘在水平面上做等速率圓周運動時，向心力是

(A)繩上的張力　(B)物體的重量

(C)張力與重力的合力　(D)張力的垂直分量

[解答]：

(C)

例題：

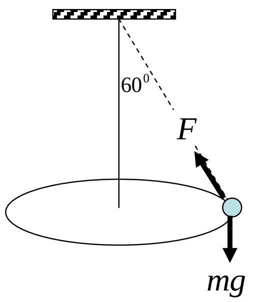
長 L 之彈簧下懸質量 m 之物體，靜止時之長為 1.5L，使此裝置做錐動擺使用。當幅角為 60^0 時，此彈簧之長度變為多少？

[解答]：

$$mg = k(1.5L - L) \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2mg}{L}$$

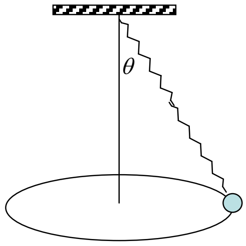
$$F\cos 60^0 = mg \quad \Rightarrow \quad F = 2mg$$

$$F = 2mg = k(L' - L) \quad \Rightarrow \quad L' = 2L$$



例題：

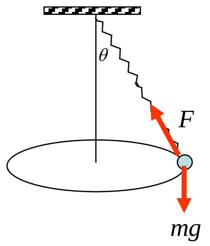
有一彈簧長 10 厘米，將一端固定而在另一端懸掛一物體時伸長 2 厘米。若以通過固定端的鉛直線為軸使該物體旋轉，則在測得彈簧長為 14 厘米時，彈簧和旋轉軸間的角度 θ 為幾度？



[解答]：

設物體質量為 m，彈簧彈性係數為 k。$mg = 0.2k$

圖中，彈簧長為 14 厘米時， $F = 0.4k = 2mg$



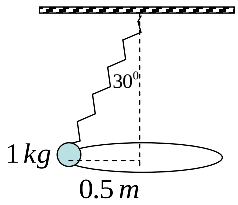
$$F\cos\theta = mg \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{mg}{F} = \frac{mg}{2mg} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = 60^0$$

例題：

質量 1 公斤的質點在一水平面上做等速率圓周運動，半徑為 0.5 公尺，如圖所示。已知彈簧原長為 0.9 公尺，則彈簧彈力常數為多少？

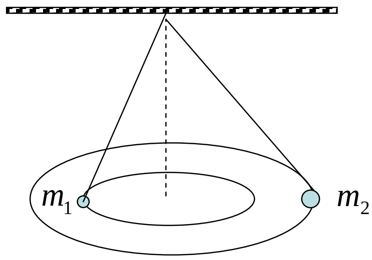
($g = 10 m/s^2$)



[解答]：

$$k = \frac{200}{\sqrt{3}}\,(N/m)$$

例題：



如圖所示，物體 m_1、m_2 在同一水平面上做錐動擺，即 m_1、m_2 繞同一鉛垂線在同一水平面做等速率圓周運動。m_1 的旋轉半徑為 R，m_2 的旋轉半徑為 2R。下列敘述何者正確？

(A) m_1、m_2 週期相等

(B) m_1 週期為 m_2 週期的一半

(C) m_1、m_2 速率相等

(D) m_1、m_2 的向心加速度相等

(E) m_1、m_2 角速率相等

[解答]：

(A)(E)

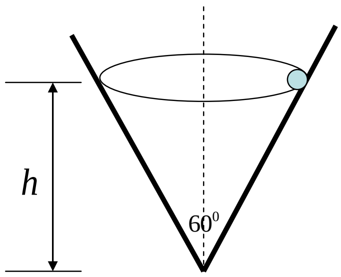
例題：

如圖所示，質量為 m 之小球在一頂角為 60^0 之光滑玻璃漏斗上距地面高 h 之水平面上做等速率圓周運動。則

(1)小球作用於漏斗壁上的正向力為若干？

(2)球旋轉週期為若干？

[解答]：

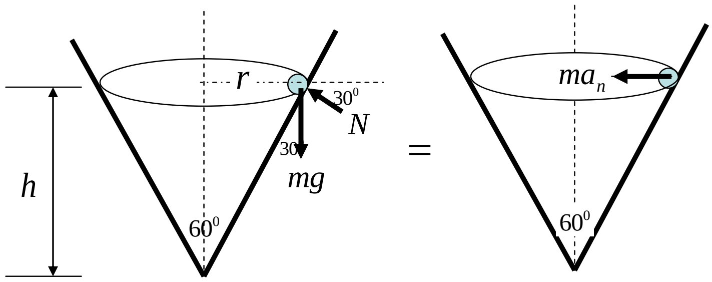


[解答]： $r = h\tan 30^0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}h$

(1) $N\sin 30^0 = mg \quad \Rightarrow \quad N = 2mg$

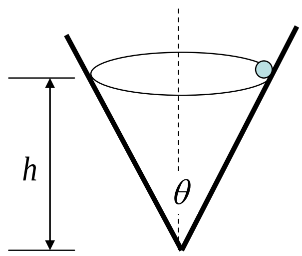
(2) $N\cos 30^0 = ma_n = m\dfrac{4\pi^2 r}{T^2} = m\dfrac{4\pi^2\dfrac{1}{\sqrt{3}}h}{T^2}$

$$2mg\cos 30^0 = m\frac{4\pi^2\dfrac{1}{\sqrt{3}}h}{T^2} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{3g}}$$



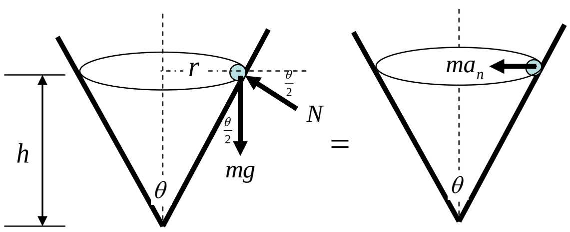
例題：

如圖所示，一小物體在錐頂角 $\theta = 37^0$ 的光滑圓錐內面上進行等速率圓周運動，其軌跡與錐頂相距 $h = 45\,cm$，則此物體的旋轉速率為多少？



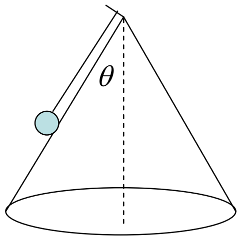
[解答]：

$$r = h\tan\frac{\theta}{2}$$



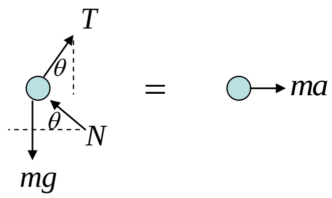
$$\begin{cases} N\sin\dfrac{\theta}{2} = mg \\ N\cos\dfrac{\theta}{2} = m\dfrac{v^2}{h\tan\dfrac{\theta}{2}} \end{cases} \Rightarrow \quad \tan\frac{\theta}{2} = \frac{gh\tan\dfrac{\theta}{2}}{v^2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{gh}$$

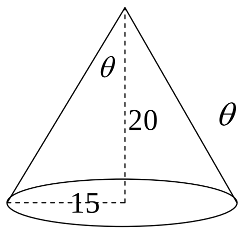
例題：



如圖所示，1 公斤的小球繫於繩上，貼著光滑圓錐(圓錐高度 20 公分、半徑 15 公分)，以速率 $\sqrt{\frac{3}{10}}$ 做等速率圓周運動。已知繩長 10 公分，求圓錐面給小球的正向力量值為何？ ($g = 10m/s^2$)

[解答]：

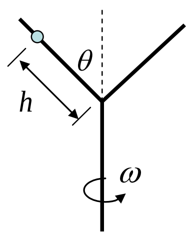




$$\theta = \tan^{-1}(\frac{15}{20}) = 37^0$$

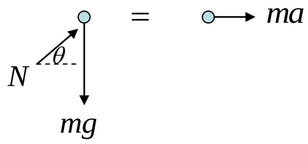
$$\begin{cases} T\cos\theta + N\sin\theta = mg \\ T\sin\theta - N\cos\theta = m\dfrac{v^2}{0.1\sin\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = 11 \\ N = 2 \end{cases}$$

例題：



有一質量為 m 的小球串於 Y 型桿上，如圖所示。該 Y 型桿繞鉛直軸旋轉，使小珠維持一個固定長度 h = 2 m 、 θ =37⁰。若小珠與 Y 型桿間無摩擦，則 Y 型桿旋轉的角速率 ω 為多少？取 g=10 m/s²。

[解答]：

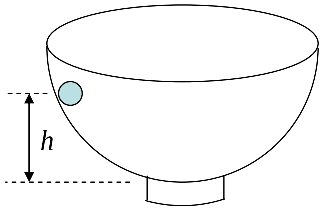


$$\begin{cases} N\sin\theta = mg \\ N\cos\theta = mr\omega^2 \end{cases} \Rightarrow r\omega^2 = g\cot\theta$$

$$2\sin 37^0 \omega^2 = 10\cot 37^0 \Rightarrow \omega = \frac{10}{3}(rad/s)$$

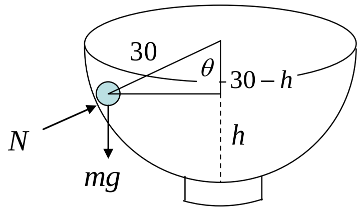
例題：

如圖所示，內壁光滑半徑 30 公分的半球形碗內，有一質量 20 公克的小鋼珠，使它沿固定的水平面以 7 rad/s 之角速度做等速率圓周運動而不滑落。則此水平面距碗底之高度 h 為何？



[解答]：

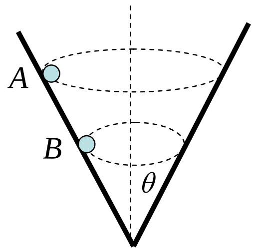
$$\begin{cases} N\cos\theta = mg \\ N\sin\theta = m(0.3\sin\theta\omega^2) \end{cases} \Rightarrow 0.3\omega^2 = \frac{g}{\cos\theta}$$



$$0.3\times 7^2 = \frac{10}{\frac{30-h}{30}} \Rightarrow 30-h = \frac{1000}{7^2} \Rightarrow h = 9.6\,(cm)$$

例題：

如圖所示，一個內壁光滑的圓錐筒的軸線垂直於水平面，圓錐筒固定不動。有兩個質量相同的小球 A 和 B 緊貼著內壁分別在圖中所示的水平面內做等速率圓周運動，下列敘述何者正確？



(A)球 A 的切線速度必定大於球 B 的切線速度

(B)球 A 的角速度必定小於球 B 的角速度

(C)球 A 的向心加速度必定小於球 B 的向心加速度

(D)球 A 的旋轉週期必定小於球 B 的旋轉週期

(E)球 A 對筒壁的正向力必定大於球 B 的對筒壁的正向力

[解答]：

(A)(B)

彎道路面的傾斜角

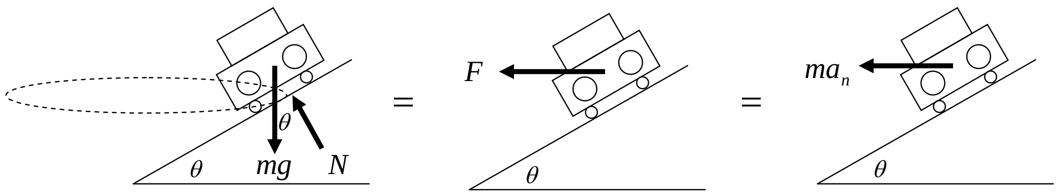
車子在半徑為 r 角度為 θ 的彎道路面上行駛，若無滑動現象，即不上滑或下滑，此時無摩擦力產生。

(1)車子所受力量：重力 mg 、地面正向力 N $\quad N\cos\theta = mg$

(2)合力：向心力 $F = N\sin\theta = mg\tan\theta$

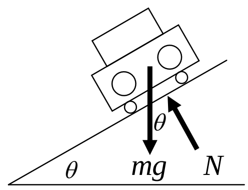
(3)向心加速度： $F = mg\tan\theta = ma_n \quad \Rightarrow \quad a_n = g\tan\theta$

(4)車子安全速度： $a_n = g\tan\theta = \dfrac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{gr\tan\theta}$

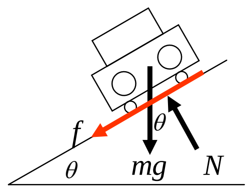


車子行駛於安全速率時，在車子輪子上沒有摩擦力。

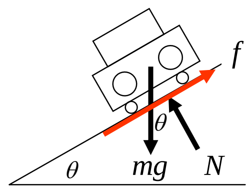
(1) 若車速度 $v = \sqrt{gr\tan\theta}$ ，此時車子不需靠摩擦力，恰可轉彎。



(2)若車速度 $v > \sqrt{gr\tan\theta}$ ，此時車子需靠斜向下的摩擦力，才可轉彎，否則上滑。



(3)若車速度 $v < \sqrt{gr\tan\theta}$ ，此時車子需靠斜向上的摩擦力，才可轉彎，否則下滑。



例題：

設計彎道的路面時會考慮路面的傾斜角，下列何者與此有關？

(A)車輛的速率　　**(B)**車輛的重量

(C)彎道的道路半徑　　**(D)**當地的重力加速度

[解答]：

(A)(C)(D)

例題：

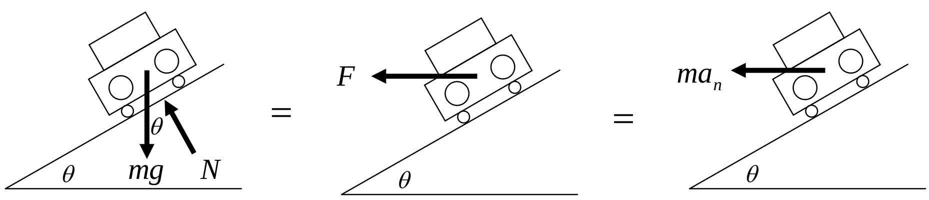
以 36 km/hr 的速度在半徑 200 m 的彎路上行駛火車，欲使鐵軌不受側壓，則外側鐵軌應較內側鐵軌高出若干？(假設二鐵軌之間距離為 120 cm ， g=10 m/s^2)

[解答]：

$$36\,(km/hr) = 36\times\frac{1000}{60\times 60} = 10\,(m/s)$$

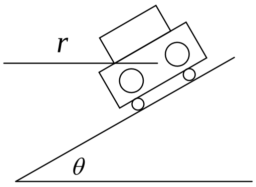
$$v=\sqrt{gr\tan\theta} \quad\Rightarrow\quad 10=\sqrt{10\times 200\tan\theta} \quad\Rightarrow\quad \tan\theta=\frac{1}{20}$$

外側鐵軌應較內側鐵軌高出： $120\sin\theta \approx 120\tan\theta = 6\,(cm)$



例題：

如圖所示，汽車在傾斜角為 θ 的路面轉彎時，若其車速為 v，迴轉半徑為 r，在不計一切阻力的條件下，則 $\sin\theta$ 應為多少？



[解答]：

$$v=\sqrt{gr\tan\theta}\quad\Rightarrow\quad\tan\theta=\frac{v^2}{gr}$$

$$\sin\theta=\frac{v^2}{\sqrt{v^2+(gr)^2}}$$

例題：

在圓形公路的轉彎處，將轉彎處路面築成斜面， 外側較高。若不考慮地面摩擦力， 以 R 表示彎路半徑， v 表示行車速率， $g=10\ m/s^2$ 。若在相同的傾斜路面上行駛， 當 v=6 m/s ，R 的最大極限為 12 m ，則下列何項行車資料可以確保行車安全(不往外滑動)？

(A) v=10 m/s ，R= 5 m　**(B)** v=8 m/s ，R= 10 m

(C) v=9 m/s ，R= 18 m　**(D)** v=5 m/s ，R= 8 m

(E) v=7 m/s ，R= 17 m

[解答]： **(E)** $v=\sqrt{gr\tan\theta}$

車子欲安全行駛，需 $\dfrac{v^2}{R}=a_n=g\tan\theta \quad\Rightarrow\quad \tan\theta=\dfrac{v^2}{gR}$

當 $v=6\,(m/s)$ 、 $R=12\,(m)$ $\quad 6^2=10\times12\tan\theta \quad\Rightarrow\quad \tan\theta=\dfrac{3}{10}$

(A) $v=10\,(m/s) \quad R=5\,(m) \quad v=\sqrt{10\times5\times\dfrac{3}{10}}=\sqrt{15}<10$ **(往外滑動)**

(B) $v=8\,(m/s) \quad R=10\,(m) \quad v=\sqrt{10\times8\times\dfrac{3}{10}}=\sqrt{24}<8$ **(往外滑動)**

(C) $v=9\,(m/s) \quad R=18\,(m) \quad v=\sqrt{10\times18\times\dfrac{3}{10}}=\sqrt{54}<9$ **(往外滑動)**

(D) $v=5\,(m/s) \quad R=8\,(m) \quad v=\sqrt{10\times8\times\dfrac{3}{10}}=\sqrt{24}<5$ **(往外滑動)**

(E) $v=7\,(m/s) \quad R=17\,(m) \quad v=\sqrt{10\times17\times\dfrac{3}{10}}=\sqrt{51}>7$

例題：

有一圓形彎路，半徑為 120 公尺，路基內、外側傾斜角為 37^0。今有質量為 1000 公斤之汽車沿此彎路行駛，取 $g=10\ m/s^2$，則

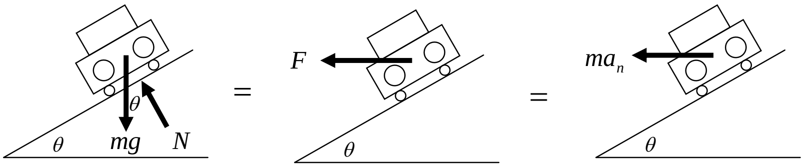
(1)按路面設計，行車安全速率應為多少？

(2)若汽車速率增至安全速率的 2 倍，且汽車不致向外滑行，此時車胎與路面間之摩擦力為若干？

(3)在 **(2)** 中，路面給予汽車之正向力為若干？

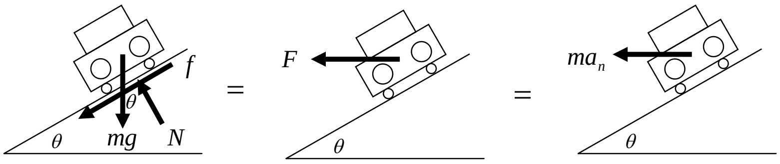
[解答]：

(1) 車子行駛於安全速率時，在車子輪子上沒有摩擦力。



$$\begin{cases} F = N\sin 37^0 = 1000 \times \dfrac{v^2}{120} \\ N\cos 37^0 = 1000 \times g \end{cases} \qquad \begin{aligned} v &= \sqrt{gr\tan\theta} \\ &= \sqrt{10 \times 120 \times \tan 37^0} = 30\ (m/s) \end{aligned}$$

(2) (3) $$\begin{cases} F = N\sin 37^0 + f\cos 37^0 = 1000 \times \dfrac{60^2}{120} \\ N\cos 37^0 - f\sin 37^0 = 1000 \times g \end{cases} \qquad \begin{cases} f = 1.8 \times 10^4\ (N) \\ N = 2.6 \times 10^4\ (N) \end{cases}$$



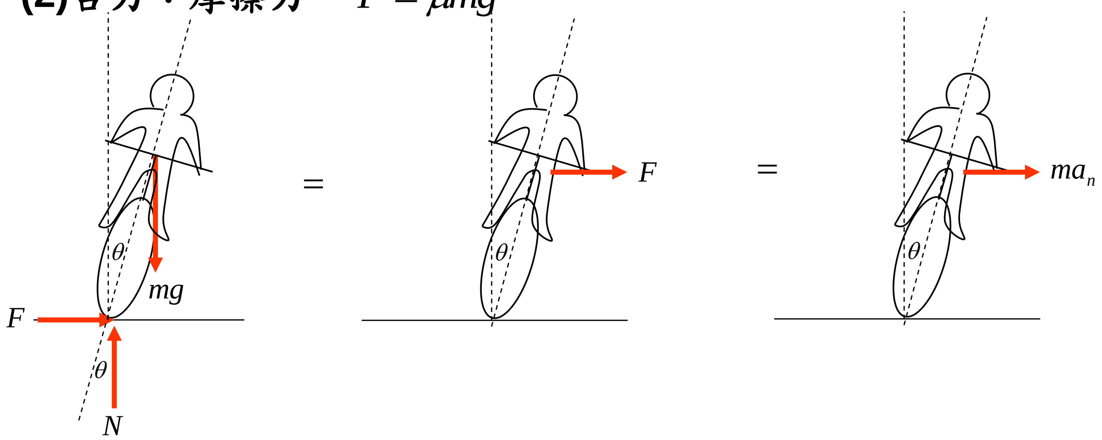
水平粗糙路面的轉彎

一人騎腳踏車以 v 的速度前進，當其進入水平彎路後車身傾斜一角度 θ，腳踏車與地面間的摩擦係數為 μ。

(1) 車子所受力量：重力 mg 、地面正向力 N $\qquad N = mg$

摩擦力 $\quad F \le \mu N \;\Rightarrow\; N\tan\theta \le \mu N \;\Rightarrow\; \mu \ge \tan\theta$

(2) 合力：摩擦力 $\quad F = \mu mg$



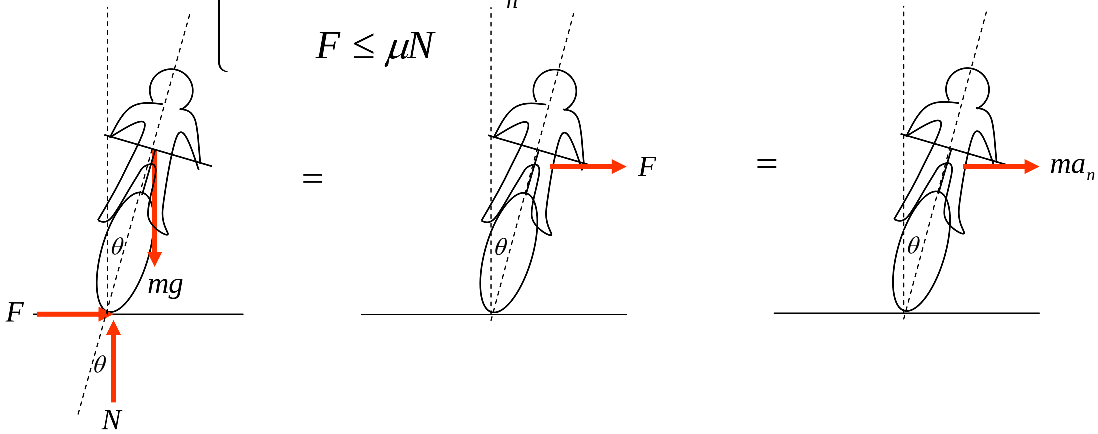
(3)向心加速度： $F=\mu N=ma_n \quad \Rightarrow \quad a_n=\mu g$

(4)車子安全速度： $a_n=\mu g=\dfrac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v=\sqrt{\mu g r}$

(5)鉛直線傾斜角度 θ： $a_n=\mu g=\tan\theta g=\dfrac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad \tan\theta=\dfrac{v^2}{gr}$

公式同彎道路面的傾斜角

$$\begin{cases} N=mg \\ F=N\tan\theta=ma_n \\ F\le \mu N \end{cases}$$

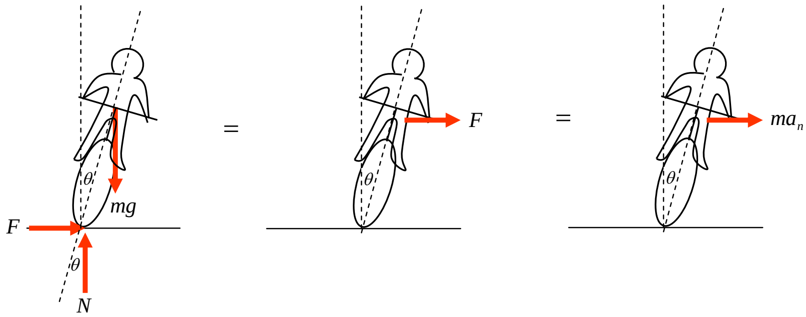


例題：

一人騎腳踏車以 10 m/s 的速度前進，當其進入水平彎路後車身傾斜一角度。若彎路之曲率半徑為 20 m ，則車身與鉛直方向所成角度為幾度？車輪與路面摩擦係數最小需為多少 ?(g=10 m/s^2)

[解答]：

$$\begin{cases} N=mg \\ F=N\tan\theta=ma_n \\ F\le \mu N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g\tan\theta=\dfrac{10^2}{20} \\ \tan\theta\le\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta=\tan^{-1}05 \\ \mu\ge 0.5 \end{cases}$$



例題：

一公路上有一圓弧形彎道，係為 60 Km/hr 的車速設計

(1)若圓弧半徑為 R=150 m ，則此公路的傾斜角 θ 應為若干？

(2)若彎道不傾斜，如仍欲維持行車安全，則輪胎與路面間的靜摩擦係數最小為多少？ ($g=10\ m/s^2$)

[解答]： $60\,(km/hr) = 60\times\dfrac{1000}{60\times 60} = \dfrac{50}{3}\,(m/s)$

(1) $$\begin{cases} N\cos\theta = mg \\ N\sin\theta = m\dfrac{v^2}{r} \end{cases} \Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{v^2}{gr} = \frac{(\frac{50}{3})^2}{10\times 150} = \frac{5}{27}$$

(2) $$\begin{cases} N = mg \\ F = N\tan\theta = ma_n \\ F \le \mu N \end{cases} \Rightarrow \quad \mu \ge \tan\theta = \frac{5}{27}$$

例題：

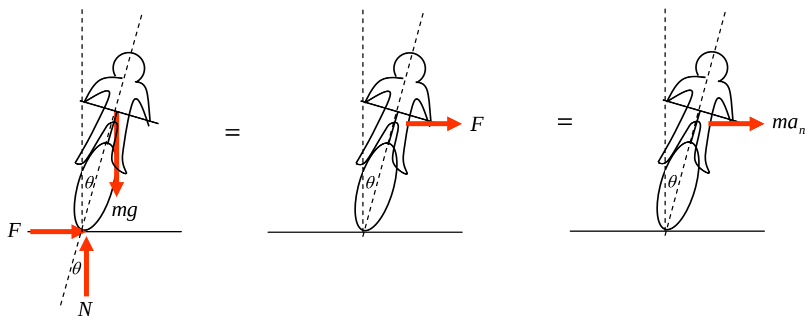
一人騎摩托車以 36 km/hr 的速度向十字路口行進，路口有圓環車道，其繞轉半徑為 25 公尺，取 $g=10\ m/s^2$，則

(1)當他進入圓環車道後，車身傾斜一角度並保持原速繞環而行，此時加速度為何？

(2)此人車身與鉛直線所夾角度幾度？

(3)在 (2) 中，車輪與路面摩擦係數最小為多少？

[解答]：



$$36\,(km/hr)=36\times\frac{1000}{60\times 60}=10\,(m/s)$$

(1) $a=\dfrac{10^2}{25}=4\,(m/s^2)$

(2)(3) $\begin{cases} N=mg \\ F=N\tan\theta=ma_n \\ F\le\mu N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g\tan\theta=4 \\ \tan\theta\le\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta=\tan^{-1}0.4 \\ \mu\ge 0.4 \end{cases}$

例題：

假若輪胎與濕的瀝青路面間的摩擦係數為 0.5，今於一曲率半徑為 40 公尺的平坦公路轉彎處車子的最大安全速度為若干？(g=10 m/s^2)。最大安全速度與車子質量是否有關？

[解答]：

$$\begin{cases} N=mg \\ F=N\tan\theta=ma_n \\ F\le\mu N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g\tan\theta=\dfrac{v^2}{40} \\ \tan\theta\le 0.5 \end{cases} \Rightarrow \tan\theta=\frac{v^2}{400}\le 0.5$$

$$v\le 10\sqrt{2}\,(m/s)$$

最大安全速度與車子質量無關

第 4-5 節 簡諧運動

在一直線上，物體受到與位移大小成正比，而與位移方向相反的力作用，使物體做週期性的往復運動，稱為簡諧運動。即

$$F = -kx \qquad m\ddot{x} = -kx \qquad m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega^2} x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \longrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$x(t) = \begin{cases} R\cos(\omega t + \theta) \\ R\sin(\omega t + \theta) \end{cases} \qquad R:\text{振幅}$$

在 $t = 0$ 時，不同位移與速度條件下，才能決定 θ 值

基本函數的微分

(1) $\dfrac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$ **EX:** $\dfrac{d(x^5)}{dx} = 5x^4$

(2) $\dfrac{d(\sin x)}{dx} = \cos x$

(3) $\dfrac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$

(4) $\dfrac{d(e^x)}{dx} = e^x$

(5) $\dfrac{d(\ln x)}{dx} = \dfrac{1}{x}$ $\ln x = \log_e x$

合成函數的微分

$$\frac{d[f(g(x))]}{dx} = \frac{df(x)}{dx}\frac{dg(x)}{dx}$$

EX: $\dfrac{d[(x^3+2x^2-9x-7)^5]}{dx} = 5(x^3+2x^2-9x-7)^4\cdot(3x^2+4x-9)$

EX: $\dfrac{d[\sin(3x+2)]}{dx} = \cos(3x+2)\cdot(3) = 3\cos(3x+2)$

EX: $\dfrac{d[\cos(7x+4)]}{dx} = -\sin(7x+4)\cdot(7) = -7\sin(7x+4)$

EX: $\dfrac{d[\sin^2(3x+2)]}{dx} = 2\sin(3x+2)\cdot\cos(3x+2)\cdot(3)$

EX: $\dfrac{d[e^{\sin(3x+2)}]}{dx} = e^{\sin(3x+2)}\cdot\cos(3x+2)\cdot(3)$

連鎖律的應用

$$f = f(x) \qquad x = g(t)$$

$$\frac{d[f(g(t))]}{dx} = \frac{df(x)}{dx}\frac{dx}{dt}$$

EX: $f(x) = \cos(7x+4) \qquad x(t) = \sin 2t$

$$\frac{df(x)}{dt} = \frac{df(x)}{dx}\frac{dx}{dt} = -7\sin(7x+4)(2\cos 2t)$$

EX: **彈性位能：** $V = \dfrac{1}{2}kx^2 \qquad \dfrac{dV}{dt} = kx\dfrac{dx}{dt} = kx\dot{x}$

EX: **動能：** $E_k = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 \qquad \dfrac{dE_k}{dt} = m\dot{x}\dfrac{d\dot{x}}{dt} = m\dot{x}\ddot{x}$

函數乘法的微分

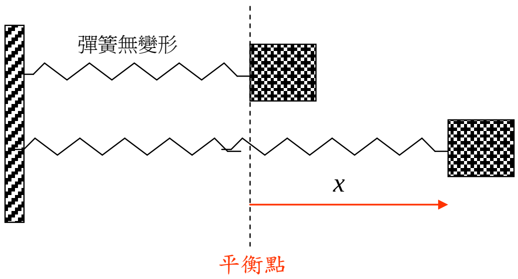
$$\frac{d[f(x)g(x))]}{dx}=\frac{df(x)}{dx}g(x)+f(x)\frac{dg(x)}{dx}$$

EX: $$\frac{d[x^2\sin(3x+2)]}{dx}=2x\sin(3x+2)+x^2\cdot 3\cos(3x+2)$$

EX: $$\frac{d[\sin(2x+5)\cos(7x+4)]}{dx}$$
$$=2\cos(2x+5)\cos(7x+4)-7\sin(2x+5)\sin(7x+4)$$

EX: $$\frac{d[e^{x^2}\cos(7x+4)]}{dx}=2xe^{x^2}\cos(7x+4)-7e^{x^2}\sin(7x+4)$$

水平彈簧簡諧運動



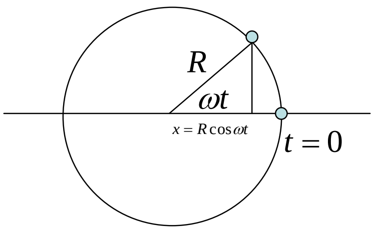
彈性位能： $V=\frac{1}{2}kx^2$

動能： $E_k=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$

$$\frac{d}{dt}(E_k+V)=kx\dot{x}+m\dot{x}\ddot{x}=0$$

$$\ddot{x}+\underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega^2}x=0$$

若當時間 $t=0$ **、** $v=0$ **時，物體位於最大水平位移** R **處，則**



$$x=R\cos\omega t \qquad \omega=\frac{2\pi}{T}$$

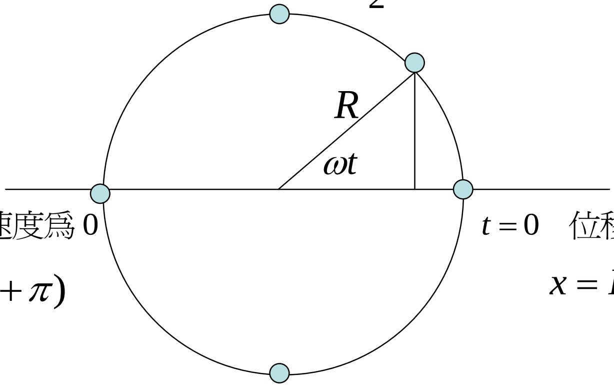
$$v=\frac{dx}{dt}=-R\omega\sin\omega t$$

$$a=\frac{d^2x}{dt^2}=-R\omega^2\cos\omega t$$

在 $t=0$ 時，不同位移與速度條件下的位置方程式

$t=0$ 位移爲 0 速度爲負

$$x = R\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$



$t=0$ 位移爲 $-R$ 速度爲 0

$$x = R\cos(\omega t + \pi)$$

$t=0$ 位移爲 R 速度爲 0

$$x = R\cos\omega t$$

$t=0$ 位移爲 0 速度爲正

$$x = R\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

特別注意：此時方程式中角度 $\theta = \omega t$ 皆由正 x 軸算起

鉛直彈簧(以平衡點為中心)做簡諧運動

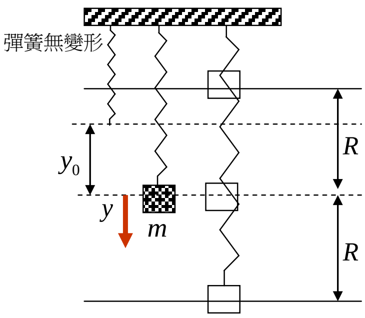
平衡點：物體懸吊在彈簧下端靜止時的位置

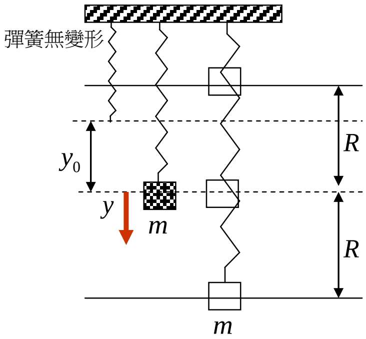
當物體非靜止時，將以平衡點為中點做簡諧運動

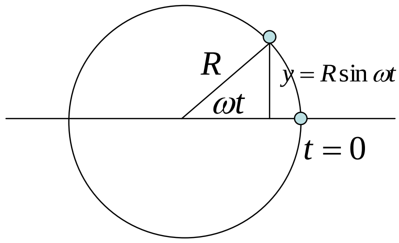
由平衡點算起的位移： y

不需考慮重力位能

(視同水平運動)力學能守恆： $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ky^2$







若當時間 $t=0$ 時，物體位於平衡點 $y=0$ 處，則

$$y = R\sin\omega t \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

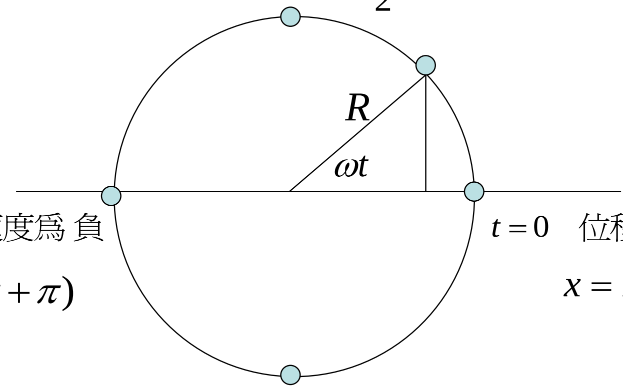
$$v = \frac{dy}{dt} = R\omega\cos\omega t$$

$$a = \frac{d^2r}{dt^2} = -R\omega^2\sin\omega t$$

在 $t=0$ 時，不同位移與速度條件下的位置方程式

$t=0$　位移為 R　速度為 0

$$x = R\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$



$t=0$　位移為 0　速度為負

$$x = R\sin(\omega t + \pi)$$

$t=0$　位移為 0　速度為正

$$x = R\sin\omega t$$

$t=0$　位移為 $-R$　速度為 0

$$x = R\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

特別注意：此時方程式中角度 $\theta = \omega t$ 皆由正 x 軸算起

例題：

下列有關簡諧運動的敘述何者正確？

(A)運動路徑為直線

(B)距平衡點的距離越大，物體的速率越小

(C)加速度與位置的關係圖為一正弦曲線

(D)物體的速率越大時，其加速度的量值越小

(E)加速度的方向恆與物體的運動方向相反

[解答]：

$(A)(B)(D)$

(E) $v=\dfrac{dx}{dt}=-R\omega\sin\omega t \qquad a=\dfrac{d^2x}{dt^2}=-R\omega^2\cos\omega t$

加速度的方向與物體的運動方向，有時相同有時反向

例題：

簡諧運動屬於

(A)等加速度運動　(B)變加速度運動

(C)等速度運動　(D)變速度運動

(E)圓周運動

[解答]：

$(B)(D)$

例題：

用彈簧繫於物體，在光滑水平面上由靜止而運動。當彈簧伸長量漸漸減小時，此物

(A)速度漸漸減小　(B)速度漸漸增大

(C)加速度漸漸減小　(D)加速度漸漸增大

(E)等速運動

[解答]：

$(B)(C)$

例題：

在一個單擺裝置中，擺動物體是個裝滿水的空心小球。球的正下方有一小孔，當擺開始以小角度擺動時，讓水從球中連續流出，直到流完為止。則此擺球的週期將

(A)逐漸增大　(B)逐漸減小　(C)先增大後減小

(D)先減小後增大　(E)不變

[解答]：

(C)

單擺週期公式中的 L 是指擺錘的質心到懸掛點的長度。當水流出時，球的質心會先下降，當水全部流光後，又恢復原先擺錘中心處。故週期先增大後減小。

例題：

下列有關簡諧運動的敘述何者正確？

(A)所受淨力最大時，速度最小

(B)加速度與位移成正比

(C)速度最大時，位移為零

(D)位移為振幅之一半時，速率為最大速率之 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

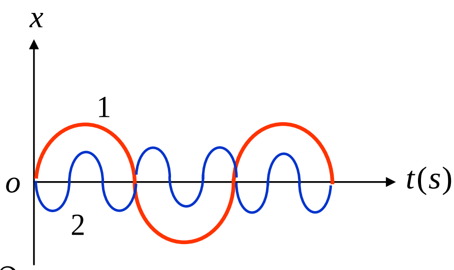
(E)加速度為最大值之一半時，位移為振幅之一半

[解答]：

(A)(B)(C)(D)(E)

例題：

兩個擺長分別為 L_1 和 L_2 的單擺做小角度振動，他們的位移對時間圖形分別為圖中 1、2 所示。則 $L_1 / L_2 =$ ？



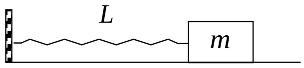
[解答]：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

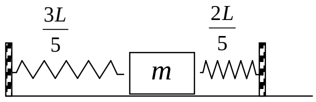
$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{6}{2} = \frac{3}{1} \quad \Rightarrow \quad \frac{L_1}{L_2} = \frac{9}{1}$$

例題：

取一彈簧做如圖(a) 之安排，物體做 S.H.M. 振動，週期為 1 秒。若將彈簧截為兩段，改裝為圖(b) ，則振動週期為多少？



圖(a)



圖(b)

[解答]：

圖(a) $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} \Rightarrow 1=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} \Rightarrow \dfrac{m}{k}=\dfrac{1}{4\pi^2}$

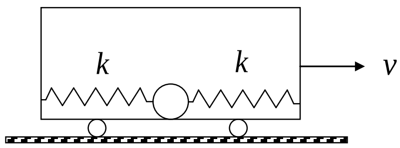
圖(b) $k:k_{3L/5}:k_{2L/5}=L:\dfrac{1}{3L/5}:\dfrac{1}{2L/5} \Rightarrow k:k_{3L/5}:k_{2L/5}=6:10:15$

$$k_{3L/5}=\frac{5}{3}k \qquad k_{2L/5}=\frac{5}{2}k \qquad k_{eq}=k_{3L/5}+k_{2L/5}=\frac{25}{6}k$$

$$T'=2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{eq}}}=2\pi\sqrt{\frac{6m}{25k}}=\frac{\sqrt{6}}{5}T=\frac{\sqrt{6}}{5}$$

例題：

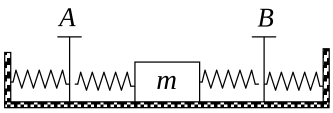
有一台車在水平面上等速行駛，在台車內的光滑地板上，質量 m 的小球左右兩側以力常數 k 的兩條彈簧連結在台車兩側，如圖所示。今台車突然剎車而停下，則小球在台車上來回振動的週期為多少？



[解答]：

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

例題：



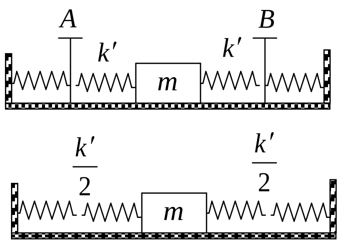
如圖所示，一乾冰圓盤放置在水平光滑平面上，被四個相同彈簧所繫。當此盤靜止於中間位置時，四彈簧皆在原長處且 A 與 B 點被釘住。現將圓盤向 A 移動 d 距離後再釋放，當其在兩彈簧中以振幅 d 與週期 T 振動時，於經過中間位置之瞬間，垂直圓盤運動方向，同時移去 A、B 兩釘，使圓盤在四條彈簧之作用下左右振動。

(1)若圓盤在 A、B 兩釘未拔去時，其所受到的等效力常數為 k。則在 A、B 兩釘拔去後，等效力常數為何？

(2)在 A、B 兩釘拔去後，圓盤之新振動週期為何？

(3)在 A、B 兩釘拔去後，圓盤之新振動振幅為何？

[解答]：



(1)設每條彈簧彈力常數為 k'

A、B 兩釘未拔去時 $k = 2k'$

A、B 兩釘拔去後，左右各等效 $\frac{k'}{2}$

整體等效： k'　　則 $k' = \frac{k}{2}$

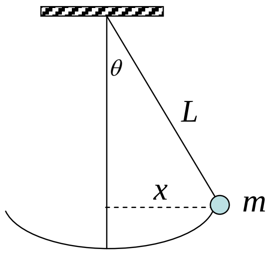
(2) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$　　$T' = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k'}} = \sqrt{2}T$

(3) 於經過中間位置之瞬間，垂直圓盤運動方向，同時移去 A、B 兩釘，因此不影響最大速度。

$$v = \frac{2\pi d}{T} = \frac{2\pi d'}{T'} \quad \Rightarrow \quad d' = \sqrt{2}d$$

例題：

如圖所示，擺長 L 的單擺，當擺錘自距最低點的水平位移為 x 處釋放，且 x 遠小於 L 時，擺錘至最低點處的速度為何？



[解答]：

$$mg(L-\sqrt{L^2-x^2})=\frac{1}{2}mv^2$$

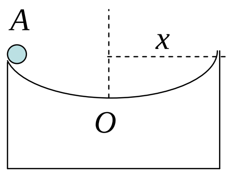
$$2g[L-L\sqrt{1-(\frac{x}{L})^2}]=v^2$$

$$2g\{L-L[1-\frac{1}{2}(\frac{x}{L})^2]\}=v^2$$

$$v=x\sqrt{\frac{g}{L}}$$

例題：

如圖所示，光滑圓弧軌道的半徑為 R，圓弧底部中點為 O，小球在離 O 很近的軌道 A 點釋放，當球滑到 O 點時，球的速度為何？

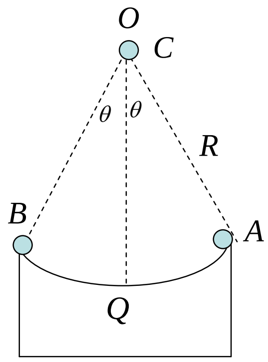


[解答]：

$$v=x\sqrt{\frac{g}{R}}$$

正向力與位移垂直，不做功。

例題：



如圖所示，A、B 兩小球在光滑的圓弧槽($\theta<5^0$)中，C 小球在圓心 O 處，三小球同時釋放，則最先到達圓弧槽中最低點 Q 的為那一球？

[解答]：

$$t_A=t_B=\frac{1}{2}T=\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

$$t_C=\sqrt{\frac{2R}{g}}<t_A$$

最先到達圓弧槽中最低點 Q 的為那 C 球

例題：

一利用單擺原理的時鐘吊在熱氣球下，若該氣球正以 $3\ \mathrm{m/s^2}$ 的加速度鉛直下降，則此時鐘每小時的誤差為多少？($g = 10\ \mathrm{m/s^2}$)

[解答]：

若該氣球正以 $3\ \mathrm{m/s^2}$ 的加速度鉛直下降，時鐘視重 $m(g-3)=7g$

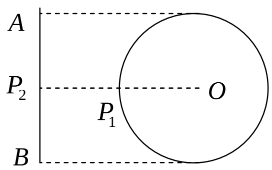
等效重力加速度： $g'=7$

$$\frac{T_1}{T_2}=\sqrt{\frac{g'}{g}} \Rightarrow \frac{3600}{T_2}=\sqrt{\frac{7}{10}} \Rightarrow T_2=3011.97\ (\mathrm{sec})$$

此時鐘每小時的誤差： $3600-3011.97\approx 588\ (\mathrm{sec})$

例題：

甲、乙兩人各在 P_1 與 P_2 兩點，$\overline{AP_2}=\overline{BP_2}=\overline{OP_1}$，$\overline{OP_1}$ 為圓 O 的半徑。甲以順時針方向從 P_1 點以等速率繞圓 O 運動，同時乙以 P_2 點為平衡點，A、B 為兩端點來回做簡諧運動。設兩者週期相同，則

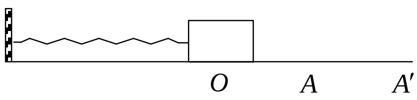


(A)甲看乙為 S.H.M. **(B)**乙看甲為 S.H.M.
(C)甲看乙為等速率圓周運動 **(D)**乙看甲為等速率圓周運動
(E)當乙在 P_2 時看甲之速度值最小

[解答]：

甲、乙只在水平方向才有相對運動，不論甲看乙或乙看甲，皆為水平方向的簡諧運動。當乙在 P_2 時， 乙看甲會認為甲恰振動到最左端 ，其瞬間速率為零。 **(A)(B)(E)**

例題：



如圖所示，一物 m 連接著輕質彈簧，放在光滑水平面上，彈簧的另一端固定在牆上，O 點為它的平衡位置。把 m 拉到 A 點，$\overline{OA}=1\,cm$，輕輕釋放，經 0.2 秒運動到 O 點。如果把 m 拉到 A' 點 ，使 $\overline{OA'}=2\,cm$，則釋放後運動到 O 點需經多少時間？

[解答]：

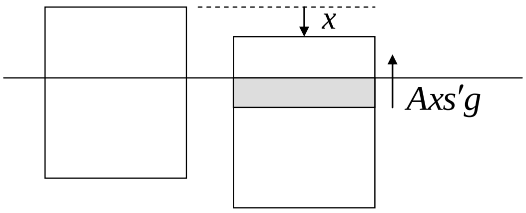
(B)週期相同

例題：

比重為 s，截面積為 A，高 h 的長方形木塊浮於比重為 s' 的液面時，沉入液中之高度為 h'。當施力壓下若干距離後放手，則木塊所做上下振動的週期為何？(不計一切阻力且液面之升降可忽略)

[解答]：

$$Ahsg = Ah's'g \quad \Rightarrow \quad hs = h's'$$



$$\underbrace{Axs'g}_{\text{施力放手後所增加的浮力}} = -Ahs\ddot{x}$$

$$ahs\ddot{x} + Axs'g = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \underbrace{\frac{s'g}{hs}}_{\omega^2} x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{s'g}{hs}} = \sqrt{\frac{g}{h'}} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{h'}{g}}$$

例題：

地震時，如果地面運動的加速度太大，地面上的建築物會被破壞。其建築物可以承受的最大地面水平加速度為 0.32g (g 為重力加速度)。假設地震時，該建築物基地的運動可視為水平簡諧運動，則角頻率為 5.6 弧度/秒 的地震發生時，此建築物可承受的最大地面水平振幅為多少公分？

[解答]：

$$x = R\cos\omega t \qquad a = \frac{d^2 r}{dt^2} = -R\omega^2\cos\omega t$$

$$R(5.6)^2 = 0.32\times 9.8 \quad \Rightarrow \quad R = 0.1\,(m) = 10\,(cm)$$

例題：

地震時，如果地面運動的加速度太大，地面上的建築物會被破壞。某建築物質量為 200 公斤，以螺柱固定在基地上，可以承受的最大水橫向力為 1080 牛頓。假設地震時，該建築物基地的運動可視為水平簡諧運動，則角頻率為 6.0 弧度/秒 的地震發生時，此建築物可承受的最大水平振幅為多少公分？

[解答]：

$$1080 = 200a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{27}{5}$$

$$R \times 6^2 = \frac{27}{5} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{3}{20}\,(m)$$

例題：

一物體作簡諧運動，其位置與時間關係為 $X(t) = 0.25\sin(0.5t)$ 公分，式中 t 以秒計算。則該物體之最大加速度的量值為多少？

[解答]：

$$X(t) = 0.25\sin(0.5t)$$

$$a(t) = -0.25 \times 0.5^2 \sin(0.5t)$$

$$|a(t)| = \left|-0.25 \times 0.5^2\right| = 0.0625 \quad (cm/s^2)$$

例題：

一物體與彈簧連接而做成水平 S.H.M. 時，以平衡點為物體位置(x)的原點，則物體的動量(p)對位置(x)的關係圖是

(A)水平直線 **(B)**斜直線 **(C)**拋物線

(D)橢圓 **(E)**正圓

[解答]：

(D)

例題：

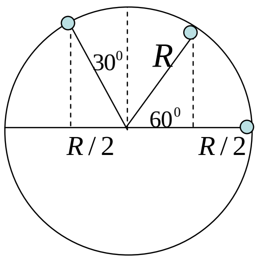
做簡諧運動的物體，設其振幅為 R，則

(1)由端點移動 R/2 與由平衡點移動 R/2 所需的時間比為何？

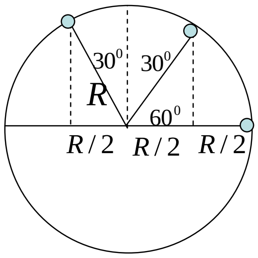
(2)由端點移動 R/2 與由端點移動 3R/2 所需的時間比為何？

[解答]：

(1) $$\frac{\omega t_{60^0}}{\omega t_{30^0}}=\frac{60^0}{30^0}=\frac{2}{1}$$



(2) $$\frac{\omega t_{60^0}}{\omega t_{120^0}}=\frac{60^0}{120^0}=\frac{1}{2}$$



例題：

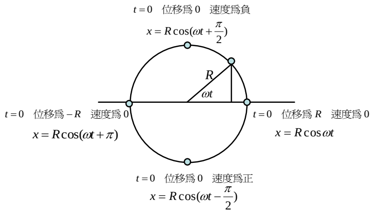
某物體做簡諧運動，週期為 6 秒，振幅為 R。當 $t=0$ 時，位移為 0，而速度為正。則在何時其位移為 $-\sqrt{3}R/2$？

[解答]：

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$$

當 $t=0$ 時，位移為 0 ，而速度為正 $x=R\cos(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{2})=R\sin\frac{\pi}{3}t$

當位移為 $-\frac{\sqrt{3}}{2}R$ $\quad -\frac{\sqrt{3}}{2}R=R\sin\frac{\pi}{3}t$



$$-\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3}t \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\frac{\pi}{3}t=\frac{4\pi}{3}+2n\pi\\ \frac{\pi}{3}t=-\frac{\pi}{3}+2n\pi\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}t=4+6n\\ t=-1+6n\end{cases}$$

$$(n=0,1,2,\Lambda)$$

例題：

一物體做簡諧運動，其振幅為 15cm，頻率為 4 Hz。求

(1)速率及加速度的最大值。

(2)當物體離開平衡位置 9 cm 時之加速度及速度大小

[解答]： $x=R\cos\omega t \quad v=-R\omega\sin\omega t \quad a=-R\omega^2\cos\omega t$

(1) $\omega=2\pi f=2\pi\times4=8\pi$

$$v_{\max}=R\omega=15\times8\pi=120\pi\ (cm/s)$$

$$a_{\max}=R\omega^2=15\times(8\pi)^2=960\pi^2\ (cm/s^2)$$

(2) $9=15\cos\omega t \quad\Rightarrow\quad \cos\omega t=\frac{3}{5}$

$$v=-R\omega\sin\omega t=-120\pi\times(\pm\frac{4}{5})=\pm96\pi\ (cm/s)$$

$$a=-R\omega^2\cos\omega t=-960\pi^2\times\frac{3}{5}=-576\pi^2\ (cm/s^2)$$

例題：

某質點做簡諧運動，其振幅為 15 cm，週期為 4 秒。求

(1)速度及加速度的最大值

(2)質點由平衡位置移至 12 cm 處之最短時間

(3)質點離開平衡點位置 9 cm 處時之速度及加速度

(4)質點由平衡位置歷 1/8 週期時之速度

[解答]： $R = 0.15\,(m)$ $\quad \omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{\pi}{2}\,(rad/s)$

$$y = 0.15\sin\frac{\pi}{2}t \qquad v = \frac{0.15\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}t \qquad a = -\frac{0.15\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{2}t$$

(1) $v_{\max} = \dfrac{0.15\pi}{2}$ $\qquad a_{\max} = \dfrac{0.15\pi^2}{4}$

(2) $0.12 = 0.15\sin\dfrac{\pi}{2}t \Rightarrow \dfrac{4}{5} = \sin\dfrac{\pi}{2}t \Rightarrow \dfrac{\pi}{2}t = 53\times\dfrac{\pi}{180}$

$$t = \frac{53}{90}\,(\text{sec})$$

(3) $0.09 = 0.15\sin\dfrac{\pi}{2}t \Rightarrow \dfrac{3}{5} = \sin\dfrac{\pi}{2}t$

$$v_{0.09} = \frac{0.15\pi}{2}(\pm\frac{4}{5}) = \pm 0.06\pi\ (m/s)$$

$$a_{0.09} = -\frac{0.15\pi^2}{4}(\frac{3}{5}) = -\frac{0.09\pi^2}{4}\,(m/s^2)$$

(4) $t = \dfrac{T}{8} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}\,(\text{sec})$ $\qquad v = \dfrac{0.15\pi}{2}\cos(\dfrac{\pi}{2}\times\dfrac{1}{2}) = \dfrac{0.15\sqrt{2}\pi}{4}\,(m/s)$

例題：

一物體做簡諧運動，其最大速率為 1 m/s ，振幅為 10 cm。當其距平衡點 8 cm 時，其速度、加速度及週期大小為何？

[解答]： $x = R\cos\omega t \qquad v = -R\omega\sin\omega t \qquad a = -R\omega^2\cos\omega t$

$$v_{\max} = R\omega = 0.1\omega = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega = 10\,(rad/s)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}\,(\sec)$$

$$0.08 = 0.1\cos 10t \quad \Rightarrow \quad \cos 10t = \frac{4}{5}$$

$$v = -0.1\times 10\sin 10t = -(\pm\frac{3}{5}) = \pm\frac{3}{5}\,(m/s)$$

$$a = -0.1\times 10^2\cos 10t = -8\,(m/s^2)$$

例題：

一物體做簡諧運動，其位置與時間關係為 $x = \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{4}t)$ 公分，式中 t 以秒計，$\frac{\pi}{4}$ 為每秒轉過的弧度角。則

(1)振幅為多少？ **(2)**週期為多少？

(3)當 2 秒時，其速率為若干？

(4) t=0 至 t=1 秒的平均速度量值

[解答]：

(1) $R = \frac{1}{2}$ **(2)** $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi/4} = 8\,(\sec)$

(3) $v = \frac{\pi}{8}\cos(\frac{\pi}{4}t) \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{\pi}{8}\cos(\frac{\pi}{4}\times 2) = 0$

(4) $\bar{v}_{0\to 1} = \frac{x_1 - x_0}{1-0} = \dfrac{x = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4} - 0}{1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,(cm/s)$

例題：

一物體做簡諧運動，其位置與時間關係為 $x = 20\sin(\frac{\pi}{4}t)$ 公分，式中 t 以秒計，$\frac{\pi}{4}$ 為每秒轉過的弧度角。則

(1)物體在一半振幅處之加速度大小？

(2) t=4 至 t=6 秒的位移為多少？

[解答]： $x = 20\sin(\frac{\pi}{4}t)$ $v = 5\pi\cos(\frac{\pi}{4}t)$ $a = -\frac{5\pi^2}{4}\sin(\frac{\pi}{4}t)$

(1) $10 = 20\sin(\frac{\pi}{4}t) \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{4}t) = \frac{1}{2}$

$$a = -\frac{5\pi^2}{4}\sin(\frac{\pi}{4}t) = -\frac{5}{8}\pi^2\ (cm/s^2)$$

(2) $x_{2\to 6} = 20\sin(\frac{\pi}{4}\times 6) - 20\sin(\frac{\pi}{4}\times 4) = -20\ (cm)$

例題：

一彈簧上端固定，一端懸一物體後彈簧伸長 d 而停止。今把彈簧再拉長 2d 然後放手任其振動，設重力加速度為 g，則振動之(1)最大加速度 (2)最大速率 為多少？

[解答]：

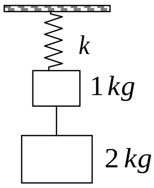
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \because \quad mg = kd \Rightarrow \frac{m}{k} = \frac{d}{g}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{d}{g}} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{d}}$$

最大振幅： 2d

(1) $a_{\max} = (2d)\omega^2 = 2g$ (2) $v_{\max} = (2d)\omega = (2d)\sqrt{\frac{g}{d}} = 2\sqrt{gd}$

例題：



在力常數為 100 牛頓/公尺 的理想彈簧下端鉛直懸掛質量分別為 1 公斤與 2 公斤的物體，系統開始處於平衡狀態。若突然割斷兩物體間之連線，求 1 公斤物體之速度極大值為何？ $(g=10\ m/s^2)$

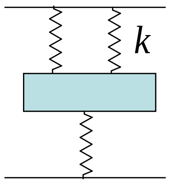
[解答]：

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{1}{100}}=\frac{\pi}{5}\quad\Rightarrow\quad\omega=\frac{2\pi}{T}=10$$

最大振幅： $R=\dfrac{2g}{k}=\dfrac{2\times 10}{100}=0.2$

速度極大值： $v=R\omega=2\,(m/s)$

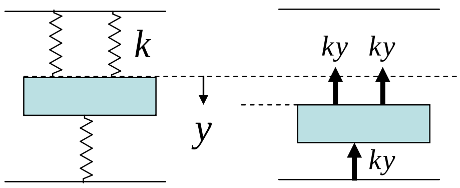
例題：



力常數均為 k，自然長度均為 L_0 的三支相同的彈簧，如圖連結質量 m 的物體。用手支持物體使三支彈簧均保持自然長度，急遽放手，試求物體的(1)振動週期 (2)振幅 (3)最大加速度　各為多少？

[解答]：

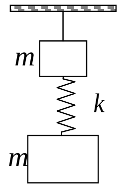
$$3ky=-m\ddot{y}\ \Rightarrow\ \ddot{y}+\underbrace{\frac{3k}{m}}_{\omega^2}y=0$$



(1) $\omega=\sqrt{\dfrac{3k}{m}}\ \Rightarrow\ T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{3k}}$

(2) $3ky_{\max}=mg\ \Rightarrow\ y_{\max}=\dfrac{mg}{3k}$　　**(3)** $a_{\max}=y_{\max}\omega^2=g$

例題：



如圖所示，一質量可忽略的彈簧，其彈力常數為 k，上端與下端各連接有一質量為 m 的物體。最初整個系統以細繩垂直懸吊，當處於靜止平衡時，彈簧之長度為 L。後來細繩突然斷開，兩物體與彈簧一起墜落，則在著地前，下列敘述何者正確？

(A)兩物體的加速度均等於重力加速度 g

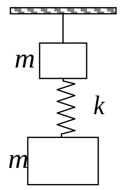
(B)彈簧的長度一直不停的改變，其週期為 $2\pi\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$

(C)彈簧的長度先恢復為其自然長度，然後不再伸縮

(D)彈簧的長度不變，繼續保持其靜止懸吊時的長度 L

(E)兩物體均處於失重狀態，就像太空船上的太空人一樣

[解答]：



(A)兩物體的加速度均等於重力加速度 g 加上 S.H.M. 的變加速度

(B)彈簧的長度以質心為中心，一直不停的改變

彈簧一半之彈力常數 $k' = 22k$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

(E)兩物體運動為簡諧運動加自由落體

例題：

有一長為 L 的彈簧，其質量可忽略，其垂直懸掛於天花板下，下端掛上一質量為 m 的砝碼。靜止時，彈簧伸長 a 而平衡，若先將砝碼托住，使彈簧回到自然長度後再釋放，此系統做簡諧運動。則

(A)振動週期為 $\pi\sqrt{a/g}$ (B)平衡點離天花板之距離為 L

(C)在平衡點之速率為 (D)振幅為 $\sqrt{ag}$

(E)在端點的速率為零

[解答]：

(C)(D)(E)

例題：

某一物體做簡諧運動，振幅為 1 m，在經過平衡位置時速率為 3.14 m/s，則當其自距離平衡位置 0.5 m 處運動至 0.8 m 處所需時間為何？

[解答]： $x=\cos\omega t$ $v=-\omega\sin\omega t$ $a=-\omega^2\cos\omega t$

$$3.14=\left|-\omega\sin\frac{\pi}{2}\right| \Rightarrow \omega=3.14$$

$$0.5=\cos 3.14t_{0.5} \Rightarrow 3.14t_{0.5}=\frac{\pi}{3} \Rightarrow t_{0.5}=\frac{1}{3}$$

$$0.8=\cos 3.14t_{0.8} \Rightarrow 3.14t_{0.8}=37\times\frac{\pi}{180} \Rightarrow t_{0.8}=\frac{37}{180}$$

$$\left|t_{0.8}-t_{0.5}\right|=\left|\frac{37}{180}-\frac{1}{3}\right|=\frac{23}{180}$$

例題：

質點做振幅 R 的簡諧運動，已知其距平衡點 R/2 處的速率為 v，則此質點

(A)速率最大值為 $2v/\sqrt{3}$ (B)加速度最大值為 $4v^2/3R$

(C)週期為 $\pi R/v$ (D)通過平衡點瞬間加速度為零

(E)距平衡點 3R/5 處之速率為 4v/5

[解答]：

(A)(B)(D)

例題：

一質點做簡諧運動，已知其在距平衡點為 0.5 m 處之加速度為 $2\pi^2\ m/s^2$。如該質點自平衡點朝某端點運動，其前半段路程(半個振幅)需耗時多久？

[解答]：

$$x = R\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \qquad v = -R\omega\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \qquad a = -R\omega^2\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$\begin{cases} 0.5 = R\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \\ 2\pi^2 = -R\omega^2\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \end{cases} \Rightarrow \frac{0.5}{2\pi^2} = \left|\frac{R}{-R\omega^2}\right| \Rightarrow \omega = 2\pi$$

$$\frac{R}{2} = R\cos(2\pi t + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow 2\pi t + \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{2\pi}{3}} \Rightarrow t = \frac{1}{12}\,(\text{sec})$$

[另解]：

$$x = R\sin \omega t \qquad v = R\omega\cos\omega t \qquad a = -R\omega^2 \sin \omega t$$

$$\begin{cases} 0.5 = R\sin \omega t \\ 2\pi^2 = -R\omega^2 \sin \omega t \end{cases} \Rightarrow \frac{0.5}{2\pi^2} = \left|\frac{R}{-R\omega^2}\right| \Rightarrow \omega = 2\pi$$

$$\frac{R}{2} = R\sin 2\pi t \Rightarrow 2\pi t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{12}\,(\text{sec})$$

例題：

一質點做簡諧運動，其位置與時間之關係為 $X(t) = 5\cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6})$ 下列哪一時刻，質點恰通過平衡點？

(A) 1/3 秒 **(B)** 2/3 秒 **(C)** 3/2 秒 **(D)** 2 秒 **(E)** 8/3 秒

[解答]：

$$0 = 5\cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow \frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

$$0 = 5\cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \\ \frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{3} + 4n \\ t = -\frac{4}{3} + 4n \end{cases}$$

$$(n = 0,1,2,\Lambda)$$

(B)(E)

例題：

一物體做簡諧運動，其位置與時間關係為 $X(t)=5\sin(2t+\frac{\pi}{6})$

(A) $t=0$ 時，$X=2.5\,cm$

(B) $t=0$ 時，加速度為 $-10cm/s^2$

(C) $t=\frac{\pi}{6}$ 時，速度為 0

(D) 第二次通過平衡點的時間為 $t=\frac{12\pi}{11}$ 秒

(E) 整個運動過程中，法線加速度皆為 0

[解答]：

(A)(B)(C)(E)

例題：

將一木塊靜置於水平板上，使此平板上下做振幅 R 的 S.H.M.。當板達到最高點時，木塊恰欲離開板面，則在平衡點上方 R/2 處，木板的速率為何？

[解答]：

$$x=R\sin\omega t \qquad v=R\omega\cos\omega t \qquad a=-R\omega^2\sin\omega t$$

當板達到最高點時，木板施於木塊之正向力為零。 $a=-g=-R\omega^2$

$$R/2=R\sin\omega t \quad\Rightarrow\quad \omega t=30^0$$

$$\begin{cases} g=R\omega^2 \\ v=R\omega\cos\omega t \end{cases} \Rightarrow \quad v=R\sqrt{\frac{g}{R}}\cos 30^0=\frac{\sqrt{3gR}}{2}$$

例題：

一木塊靜止於水平板上，此平板一上一下做 S.H.M.，振幅為 R，當達到最高點時，木塊恰離板面。則

(1)週期為何？

(2)最低點的加速度為何？

(3)最低點時平板對木塊的作用力為何？

(4)木塊的最大速度為何？

[解答]：

(1) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$ (2) $g\,(\uparrow)$

(3) $2mg\,(\uparrow)$ (4) $\sqrt{gR}$

例題：

水平施 1 牛頓之力於一彈簧時，可將彈簧拉長 1 cm，若在彈簧一端接上 4 Kg 之物體，拉長 10 cm 後釋放，當物體移動 5 cm 時

(A)所受的彈力為 5 牛頓 (B)運動加速度大小為 $1.25\ m/s^2$

(C)運動速率為 $3\sqrt{3}/2\ \ m/s$ (D)歷時 $\pi/15\,\text{sec}$

(E)再經 $\pi/30$ 秒抵平衡點

[解答]：

$$k = 100\,(N/m) \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{4}{100}} = \frac{2\pi}{5}\,(\text{sec}) \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = 5\,(rad/\text{sec})$$

$$x = 0.1\cos 5t \qquad v = -0.5\sin 5t \qquad a = -2.5\cos 5t$$

(A)(B)(D)(E)

例題：

一質量可忽略的彈簧，其下掛一質量 1 Kg 之托盤，如在托盤中再放一質量 1 Kg 之砝碼，則托盤會較前再下降 1 cm，此時突然將砝碼拿去，令托盤上、下振盪，則其振盪的頻率為多少？

[解答]： 設掛一質量 1 Kg 之托盤，彈簧位移 x_1

再放一質量 1 Kg 之砝碼，彈簧總位移 x_2

$$\begin{cases} 1g = kx_1 \\ 2g = kx_2 \end{cases} \Rightarrow \quad 2g - 1g = k(x_2 - x_1) = k \times 0.01 \quad \Rightarrow \quad k = 100g$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{100g}} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{T} = \frac{\sqrt{100g}}{2\pi}$$

例題：

質量 m 之物體做簡諧運動，最大加速度為 a，振幅為 R。則其自端點在最短時間行至振幅之半所受衝量大小若干？

[解答]： $x = R\cos\omega t \qquad v = -R\omega\sin\omega t \qquad a = -R\omega^2\cos\omega t$

$$a = \left|-R\omega^2\right| \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{a}{R}}$$

$$\frac{R}{2} = R\cos\omega t \quad \Rightarrow \quad \cos\omega t = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega t = 60^0$$

$$v_{1/2R} = -R\omega\sin 60^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}R\omega = -\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{Ra}$$

$$\int \vec{F}dt = m(\vec{v}_{1/2R} - \vec{v}_0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}m\sqrt{Ra} \qquad \left|\int \vec{F}dt\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}m\sqrt{Ra}$$

例題：

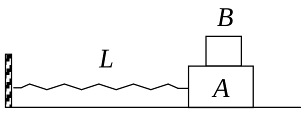
在重力場 g 中，有一擺長為 L 之單擺，其懸點之鉛直下方 L/2 處有一細釘。故當懸線從鉛直線的一側擺到鉛直線之另一側時，擺長就成為 L/2。求懸線從鉛直線的一側擺到鉛直線之另一側時所需時間？

[解答]：

$$T_1 = \frac{1}{2}(2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}) \qquad T_2 = \frac{1}{2}(2\pi\sqrt{\frac{L/2}{g}})$$

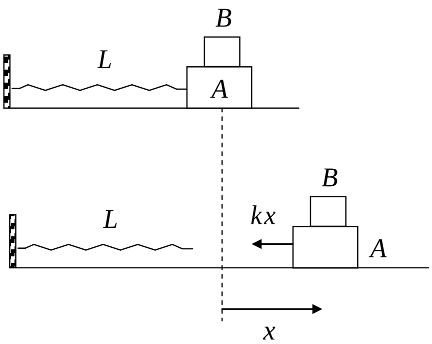
$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}(2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} + 2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}})$$

例題：



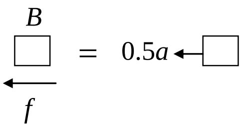
如圖所示，A、B 兩物體質量分別為 1 公斤、0.5 公斤，A、B 之間的最大靜摩擦力為 2 牛頓，水平面光滑，彈簧的力常數為 100 牛頓/公尺。為了讓 AB 一起運動，其振幅不能超過多少公尺？

[解答]：



$$-kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega^2} x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100}{1+0.5}} = \sqrt{\frac{100}{1.5}}$$

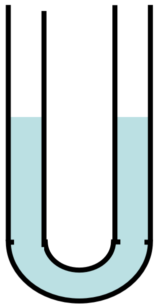


$$2 = 0.5a \Rightarrow a = 4$$

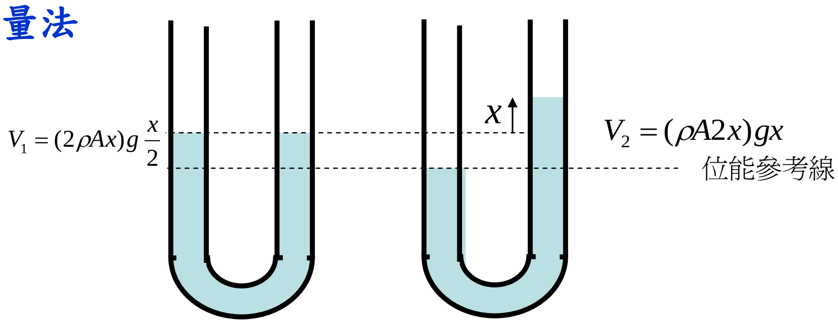
$$a = 4 = R\omega^2 \Rightarrow R = 0.06\,(m)$$

例題：

一 U 型管如圖所示，液體長度為 L，密度為 ρ，截面積為 A。求液體於平衡面之振盪運動方程式及液面的振盪頻率。亦即求此系統的運動方程式及其自然頻率。



［解析］：能量法



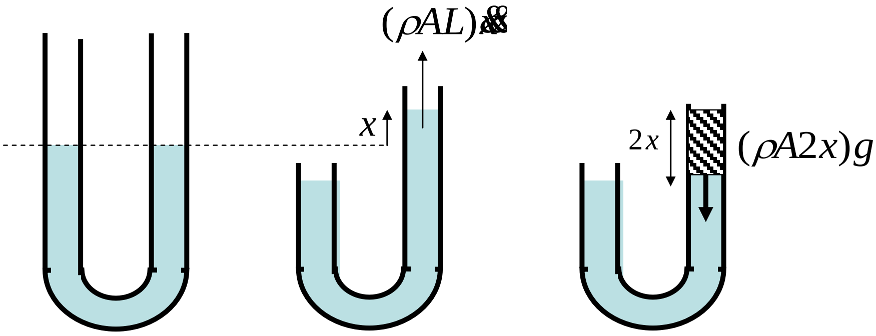
$$E_k=\frac{1}{2}m\dot{x}^2=\frac{1}{2}(\rho AL)\dot{x}^2$$

$$V=V_2-V_1=(\rho A2x)gx-(2\rho Ax)g\frac{x}{2}=\rho Agx^2$$

$$\frac{d}{dt}(E_k+V)=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dt}[\frac{1}{2}(\rho AL)\dot{x}^2+\rho Agx^2]=0$$

$$\rho AL\dot{x}\ddot{x}+2\rho Agx\dot{x}=0 \quad\Rightarrow\quad \ddot{x}+\frac{2g}{L}x=0 \qquad \omega=\sqrt{\frac{2g}{L}}$$

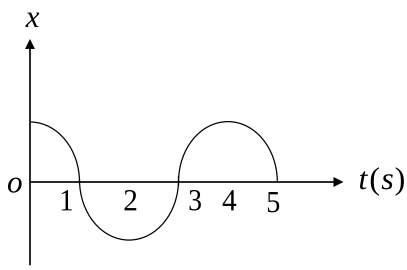
[解析]：牛頓第二定律



$$-(\rho A2x)g = \rho AL\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{2g}{L}x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{L}}$$

例題：



一質點做簡諧運動，其位移 x 與時間 t 的關係曲線如圖所示。由圖可知，在 t = 4 秒時，質點的

(A)速度為正的最大值，加速度為零

(B)速度為負的最大值，加速度為零

(C)速度為零，加速度為正的最大值

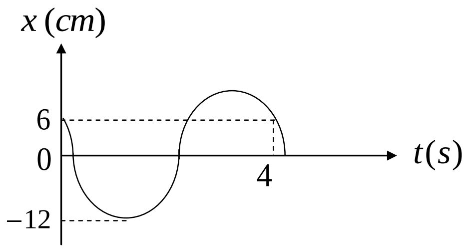
(D)速度為零，加速度為負的最大值

(E)速度與加速度皆為零

[解答]：

(D)

例題：



一個質量 2 公斤的質點，在光滑水平面上受一理想彈簧的作用而做簡諧運動。從某瞬間開始量測，得到其位移 x 與時間 t 的關係圖如圖示。則質點做簡諧運動

(A)週期為 4 秒　**(B)**最大速度值為 12π m/s

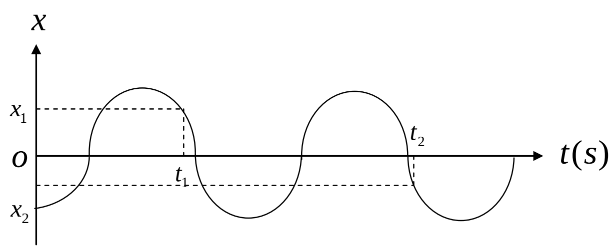
(C)最大加速度值為 $3\pi^2$ cm/s^2　**(D)**所受最大彈力 $12\pi^2$ 牛頓

(E)在 t = 4/3 秒時，其速度最小

[解答]：

(A)(C)(E)

例題：



如圖所示，為某一質點做簡諧運動的關係圖。由圖可知，在 t_1 及 t_2 兩時刻，質點的振動速度 v_1、v_2 與加速度 a_1、a_2 的大小關係

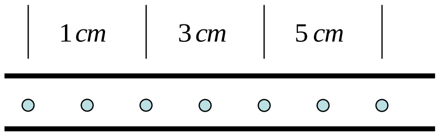
(A) $v_1 < v_2$ 方向同向　**(B)** $v_1 < v_2$ 方向反向

(C) $a_1 > a_2$ 方向同向　**(D)** $a_1 > a_2$ 方向反向

(E) $a_1 < a_2$ 方向同向

[解答]：

(A)(D)



例題：

在牛頓第二運動定律的實驗中，若輕繩與定滑輪之摩擦可忽略不計，測得計時器振動頻率為 20 次/秒。又紙帶數據如圖所示。若滑車與桌面之摩擦力為一定值，且滑車及砝碼質量各為 6 公斤及 3 公斤。則滑車與桌面之動摩擦係數為何？

[解答]：