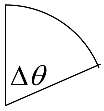
第 9-1 9-2 角速度與角加速度

(1)角位移：質點在 Δt 時間內轉過的角度 $\Delta\theta$，單位為弧度(rad) 。

$$1\text{圈} = 360^0 = 2\pi\ rad$$



(2)角速度： (a)瞬時角速度：$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$

(b)平均角速度：$\overline{\omega} = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$

單位： (a) rad/s

(b) $rps\ (\text{圈}/\text{秒}) = 2\pi\ (rad/s)$

(c) $rpm\ (\text{圈}/\text{分}) = 2\pi/60\ (rad/s)$

(3)角加速度： (a)瞬時角加速度：$\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

(b)平均角加速度：$\overline{\alpha} = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$

單位： rad/s^2

(4)頻率 (f)、週期 (T)、角頻率 (ω) 關係：

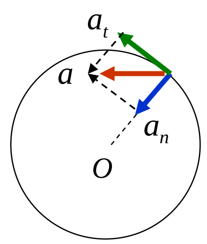
$$T = \frac{1}{f} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

剛體轉動時，由於剛體內各質點間的相對位置保持不變，故任一點皆有相同的角位移、角速度、角加速度。

質點作圓周運動的速度及加速度

(1)切線速度：

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{r\Delta\theta}{\Delta t}=r\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=r\omega=\frac{2\pi r}{T}\quad (m/s)$$



(2)加速度： $\vec{a}=\vec{a}_t+\vec{a}_n$ $\quad |\vec{a}|=\sqrt{|\vec{a}_t|^2+|\vec{a}_n|^2}$

(a)切線加速度：改變切線方向速率

$$a_t=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{r\Delta\omega}{\Delta t}=r\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=r\alpha\quad (m/s^2)$$

(b)法線(向心)加速度：改變運動方向，必指向圓心。

$$a_n=r\omega^2=\frac{v^2}{r}=\frac{4\pi^2 r}{T^2}\quad (m/s^2)$$

等加速度及等角加速度運動關係式

物理量	平移運動	轉動運動	圓周運動時兩者關係
(角)位移	Δx	$\Delta\theta$	
平均(角)速度	$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}$	$\omega=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$	$v=r\omega$
平均(角)加速度	$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}$	$\alpha=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$	$a_t=r\alpha \quad a_n=r\omega^2$
等(角)加速度運動	$v=v_0+at$ $\Delta x=v_0t+\frac{1}{2}at^2$ $v^2=v_0^2+2a(\Delta x)$	$\omega=\omega_0+\alpha t$ $\Delta\theta=\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2$ $\omega^2=\omega_0^2+2\alpha(\Delta\theta)$	剛體上任一點 $\Delta\theta$、ω 、 α 皆相同。

例題：

一準確時鐘上，秒針、分針、時針之角速度比為多少？

[解析]：

$$\omega=\frac{2\pi}{T}$$

若皆以秒為單位，秒針一圈的週期為 60 秒；分針一圈的週期為 60 分，等於 60×60 秒；時秒針一圈的週期為 12 小時，等於 $12\times60\times60$ 。

$$\omega_{秒}:\omega_{分}:\omega_{時}=\frac{2\pi}{60}:\frac{2\pi}{60\times60}:\frac{2\pi}{12\times60\times60}=720:12:1$$

例題：

在旋轉輪邊緣上一點的角位置以 $\theta=4t-3t^2+t^3$ 來描述，θ 的單位是弧度，t 的單位是秒。求

(1)開始時間在 t=0，末時間為 t=1,2,3 秒角位移？

(2)開始時間在 t=2，末時間為 t=4 秒，在此間隔平均角速度？

(3)承(2)，平均角加速度為若干？

(4) t=4 秒瞬時角速度及角加速度為若干？

［解析］：

(1) $\theta(0)=0$ $\theta(1)=2\,(rad)$ $\theta(2)=4\,(rad)$ $\theta(3)=12\,(rad)$

(2) $\theta(2)=4\,(rad)$ $\theta(4)=32\,(rad)$

$$\overline{\omega}=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{32-4}{4-2}=14\,(rad/s)$$

(3) $\theta(t)=4t-3t^2+t^3$ $\omega(t)=\dfrac{d\theta}{dt}=4-6t+3t^2$

$\omega(2)=4$ $\omega(4)=28$ $\overline{\alpha}=\dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}=\dfrac{28-4}{4-2}=12\,(rad/s^2)$

(4) $\omega(t)=\dfrac{d\theta}{dt}=4-6t+3t^2$ $\alpha(t)=\dfrac{d\omega}{dt}=-6+6t$

$\omega(4)=28\,(rad/s)$ $\alpha(4)=18\,(rad/s^2)$

例題：

一物體上一點繞質心旋轉，其角位置與時間關係為

$\theta=2t^2+3$**，求**

(1)第 2 秒末之角速度？ (2) 2 秒內之平均角速度？

(3)第 2 秒末之角加速度？ (4) 2 秒內之平均角加速度？

［解析］：

(1) $\omega(t)=4t$ $\omega(2)=8\,(rad/s)$

(2) $\theta(0)=3$ $\theta(2)=11$ $\overline{\omega}=\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}=\dfrac{11-3}{2-0}=4\,(rad/s)$

(3) $\alpha(t)=4$ $\alpha(2)=4\,(rad/s^2)$

(4) $\omega(0)=0$ $\omega(2)=8$ $\overline{\alpha}=\dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}=\dfrac{8-0}{2-0}=4\,(rad/s^2)$

例題：

有一物體做等角加速度。若該物體的角速度在 t=1 秒 及 t=6 秒 時，分別為 5 rad/s 及 10 rad/s，則下列敘述何者正確？

(A)此物體轉動的角加速度為 $2\ rad/s^2$

(B)此物體在 t=4 秒 時的角速度為 11 rad/s

(C)此物體在 t=2 秒 時的角速度為 4 rad/s

(D)此物體在 t=1 秒 至 t=3 秒 間的角位移為 12 rad

[解析]：

(D)

例題：

某物體做等角加速度運動，於第 4 秒內之角位移為 22 rad，於第 8 秒內之角位移為 38 rad。求

(1)初角速度為若干？ (2)角加速度為若干？

[解析]：

$$\begin{cases} \theta_4-\theta_3=22=(\omega_0\times 4+\frac{1}{2}\alpha\times 4^2)-(\omega_0\times 3+\frac{1}{2}\alpha\times 3^2) \\ \theta_8-\theta_7=38=(\omega_0\times 8+\frac{1}{2}\alpha\times 8^2)-(\omega_0\times 7+\frac{1}{2}\alpha\times 7^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 22=\omega_0+\frac{7}{2}\alpha \\ 38=\omega_0+\frac{15}{2}\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} \omega_0=8\,(rad/s) \\ \alpha=4\,(rad/s^2) \end{cases}$$

例題：

某輪在 15 秒內轉了 90 轉，於此時間末了之角速率為 10 轉/秒。若為等角加速度運動，則輪在開始時的角速率為何？

[解析]：

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad \Rightarrow \quad 10 \times 2\pi = \omega_0 + 15\alpha$$

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad \Rightarrow \quad 90 \times 2\pi = 15\omega_0 + \frac{1}{2} \times \alpha \times 15^2$$

$$\omega_0 = 4\pi\ (rad/s) \qquad \alpha = \frac{16\pi}{15}\ (rad/s^2)$$

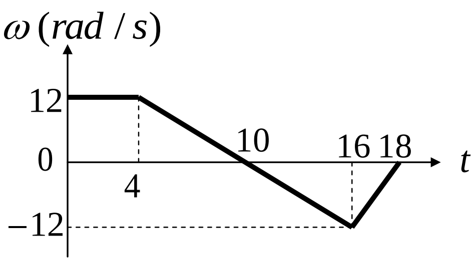
例題：

圖中表示一轉動剛體之 $\omega - t$ 圖，t=0 時剛體係在角位置為零處。則

(1)最後之角位置為何？

(2)全程平均角速度為何？

(3)全程平均角加速度為何？



[解析]：

(1) $\omega - t$ 圖的面積表位移變化量

$$\omega - t\ \text{面積} = \frac{(4+10)\times 12}{2} + \frac{(18-10)\times(-12)}{2} = 36\ (rad)$$

(2) $\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{36-0}{18-0} = 2\ (rad/s)$ **(3)** $\overline{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{0-12}{18-0} = -\frac{2}{3}\ (rad/s^2)$

例題：

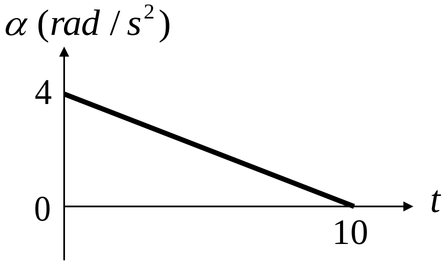
轉動質點之角加速度與時間關係如圖所示。在 t=0 時質點之角速度為零。則

(1)在 t=5 秒 時之角速度為何？

(2)在 t=5 秒 時之角加速度為何？

(3)在 t=10 秒 時之角速度為何？

(4) 10 秒 內之平均角加速度為何？



［解析］：

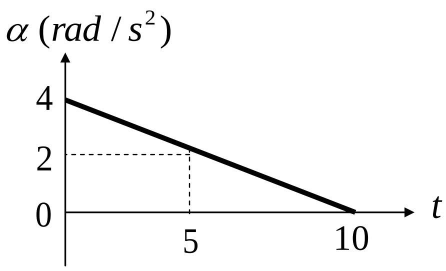
(1) $\alpha - t$ 圖的面積表角速度變化量

$$\alpha - t \text{ 面積} = \frac{(2+4)\times 5}{2} = 15\ (rad/s)$$

(2) $\alpha = 2\ (rad/s^2)$

(3) $\alpha - t \text{ 面積} = \dfrac{10\times 4}{2} = 20\ (rad/s)$

(4) $\overline{\alpha} = \dfrac{\int \alpha dt}{10} = \dfrac{20}{10} = 2\ (rad/s^2)$



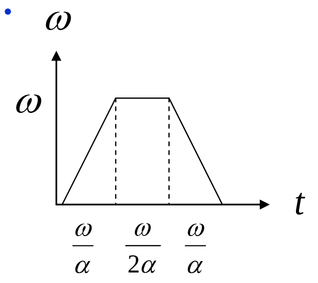
例題：

一剛體繞一定點分三階段運動。第一階段由靜止開始以 α 角加速度旋轉達 ω 之角速度後，接著第二階段以等角速度運轉，第三階段施以 $-\alpha$ 角加速度而後停止。若此三階段之角位移均相等，則全程

(1)歷時多久？　　(2)角位移如何？

[解析]：

(1)



$$t=\frac{\omega}{\alpha}+\frac{\omega}{2\alpha}+\frac{\omega}{\alpha}=\frac{5\omega}{2\alpha}$$

(2)角位移：由面積

$$\frac{(\frac{\omega}{2\alpha}+\frac{5\omega}{2\alpha})\omega}{2}=\frac{3\omega^2}{2\alpha}$$

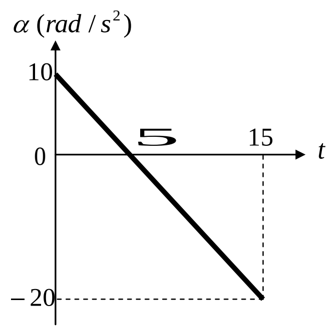
例題：

如圖為一剛體轉動時之 $\alpha-t$ 圖。設 $t=0$ 時，剛體之角速度為 $10\,rad/s$ 。求：

(1)最大之正向角速度？

(2)何時角位移最大？

(3)第 5 秒 末至第 15 秒 末之平均角加速度為何？

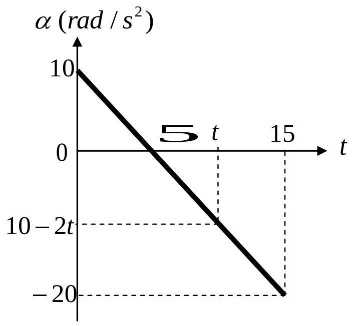


[解析]：

(1) $t=0\sim5$ 表正向角速度增加量，由面積 $\frac{1}{2}\times5\times10=25\,(rad/s)$

最大之正向角速度： $10+25=35\,(rad/s)$

(2) 角位移最大時，角速度為零。



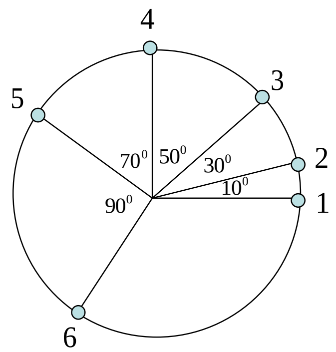
$$0=10+25-\frac{(t-5)(10-2t)}{2}$$

$$t=5+\sqrt{35}\ (\sec)$$

(3) $$\bar{\alpha}=\frac{\int\alpha dt}{15-5}=\frac{-\frac{10\times20}{2}}{10}=-10\,(rad/s^2)$$

例題：

某生用每秒閃光 10 次($\Delta t=0.1\sec$)之同步閃光燈，拍攝在水平面上轉動的小球。經過 0.5 秒 後，共得 6 個影像。已知小球從位置 1 開始沿逆時針方向轉動，距軸心 20 cm，則小球的角加速度為多少？



[解析]：

由 $10^0\to30^0\to50^0\to70^0\to90^0$ 成等差數列知，為等角加速度運動。

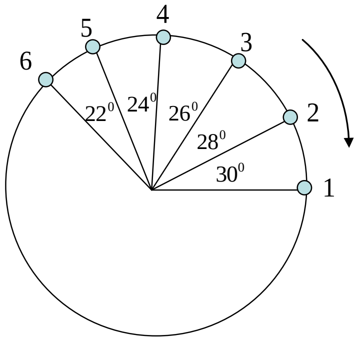
$$\bar{\omega}_{1\to2}=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{10^0}{0.1}=\frac{10\times\frac{\pi}{180}}{0.1}=\frac{\pi}{1.8}\,(rad/s)$$

$$\bar{\omega}_{2\to3}=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{30^0}{0.1}=\frac{30\times\frac{\pi}{180}}{0.1}=\frac{\pi}{0.6}\,(rad/s)$$

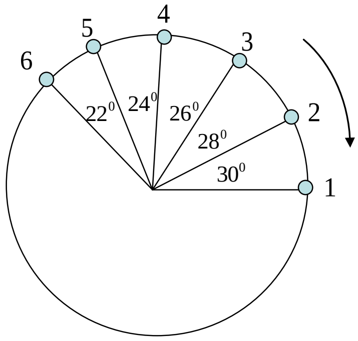
$$\bar{\alpha}=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{\frac{\pi}{0.6}-\frac{\pi}{1.8}}{0.1}=\frac{100\pi}{9}\,(rad/s^2)$$

例題：

一轉盤可繞著一鉛垂方向的軸心旋轉，在盤上距軸心 r 處放一質量 m 之硬幣。當盤轉動時藉著摩擦力帶動硬幣做圓周運動。以高速閃光攝影術拍攝某段過程如圖所示，閃光頻率為 100 Hz。求編號 1~6 過程中摩擦力施於硬幣之平均力矩大小？



[解析]：



$$\Delta t = \frac{1}{f} = \frac{1}{100} = 0.01\,\mathrm{sec}$$

$$\overline{\omega}_{1\to 2} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{30^0}{0.01} = \frac{30\times\frac{\pi}{180}}{0.01} = \frac{30\pi}{1.8}\ (rad/s)$$

$$\overline{\omega}_{2\to 3} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{28^0}{0.01} = \frac{28\times\frac{\pi}{180}}{0.01} = \frac{28\pi}{1.8}\ (rad/s)$$

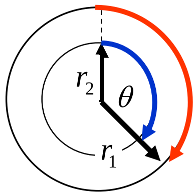
$$\overline{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\frac{30\pi}{1.8}-\frac{28\pi}{1.8}}{0.01} = \frac{1000\pi}{9}\ (rad/s^2) \qquad a_t = r\overline{\alpha} = \frac{1000\pi}{9} r\ (m/s^2)$$

$$F_t = ma_t = \frac{1000\pi}{9} mr\ (N) \qquad T = rF_t = \frac{1000\pi}{9} mr^2\ (N-m)$$

例題：

甲、乙兩人沿圓形軌道同向賽跑，甲沿半徑 r_1 的外跑道跑，乙沿半徑 r_2 的內跑道跑。設甲以 v 的速率經過乙時，乙開始起跑。此後甲始終以 v 的速率跑，而乙則以等角加速度追甲。則在乙追及甲時，乙的速率為何？

［解析］：



甲、乙兩人所花時間 t 及角位移 θ 相等

甲位移： $r_1\theta = vt$　　　乙位移： $r_2\theta = \frac{1}{2}(r_2\alpha)t^2$

$$\frac{r_1\theta}{r_2\theta} = \frac{vt}{\frac{1}{2}(r_2\alpha)t^2} \quad \Rightarrow \quad \alpha t = \frac{2v}{r_1}$$

乙追及甲時，乙的速率： $v_{乙} = r_2\omega = r_2(\alpha t) = \frac{2vr_2}{r_1}$

例題：

半徑 R=0.5 之轉輪，繞軸由靜止均勻加速轉動，在 5 秒內角速度增加至 900 rpm。則原在輪頂的 A 經 1 秒後的位置在

(A)輪底　(B)原點　(C)自原點轉 $\frac{\pi}{2}$ 處　(D)自原點轉 $\frac{3\pi}{2}$ 處

［解析］：

$$\omega_9 = 900\ (rpm) = 900 \times \frac{2\pi}{60} = 30\pi\ (rad/s)$$

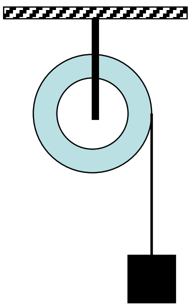
$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad \Rightarrow \quad 30\pi = 5\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 6\pi$$

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad \Rightarrow \quad \theta(1) = \frac{1}{2} \times 6\pi \times 1^2 = 3\pi\ (rad)$$

輪底

例題：

如圖所示，一長繩繞過半徑為 0.5 m 的定滑輪繫了一物體，並將此物體自靜止釋放，至 3 秒末時物體下降了 18 m。求此時滑輪的角加速度與角速度若干？



［解析］：

$$18=\frac{1}{2}\times a\times 3^2 \quad\Rightarrow\quad a=4\,(m/s^2)$$

$$a=r\alpha \quad\Rightarrow\quad 4=0.5\alpha \quad\Rightarrow\quad \alpha=8\,(rad/s^2)$$

$$\omega=\omega_0+\alpha t=8\times 3=24\,(rad/s)$$

例題：

以 72 Km/hr 行駛的汽車，車輪直徑為 80 cm。求

(1)輪對軸的角速率？

(2)若欲使輪在 30 轉內停止，則其角加速度若干？

(3)在剎車時間內汽車行駛多遠？

［解析］：

$$72\,(km/hr)=72\times\frac{1000}{60\times 60}=20\,(m/s)$$

(1) $v=r\omega \quad\Rightarrow\quad 20=0.4\omega \quad\Rightarrow\quad \omega=50\,(rad/s)$

(2) $\omega^2=\omega_0^2+2\alpha\theta \quad\Rightarrow\quad 0=50^2+2\alpha(30\times 2\pi) \quad\Rightarrow\quad \alpha=\frac{125}{6\pi}$

(3) $s=r\theta=0.4(30\times 2\pi)=24\pi\,(m)$

例題：

一質點在半徑為 0.4 m 的圓周上運動，在某瞬間的角速度為 2 rad/s，其角加速度為 5 rad/s^2。求此質點的合加速度大小？

［解析］：

$$a_t = r\alpha = 0.4\times 5 = 2\,(m/s^2)$$

$$a_n = r\omega^2 = 0.4\times 2^2 = 1.6\,(m/s^2)$$

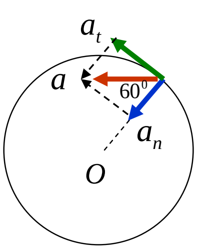
$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{2^2 + 1.6^2} = 2.56\,(m/s^2)$$

例題：

一物體對一固定軸以等角加速度由靜止開始轉動。則當合加速度和向心加速度成 60^0 角時，此物體已旋轉多少角位移（角度）？

［解析］：

$$\tan 60^0 = \sqrt{3} = \frac{a_t}{a_n} = \frac{r\alpha}{r\omega^2} = \frac{\alpha}{\omega^2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \sqrt{3}\omega^2$$



$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = 0^2 + 2\alpha\theta$$

$$\theta = \frac{1}{2\sqrt{3}}(rad) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \times \frac{360^0}{2\pi} = 16.5^0$$

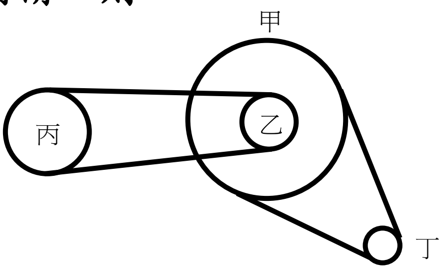
例題：

一飛輪傳動系統，各輪的轉軸均固定且相互平行，甲、乙兩輪同軸且無相對轉動。已知甲、乙、丙、丁四輪的半徑比為 5:2:3:1，若傳動帶在各轉輪中不打滑，則

(1)丙及丁輪角速度之比為何？

(2)乙及丁輪轉動角加速度之比為何？

(3)乙及丁速度大小比為何？



[解析]：

(1) 因切線速度相同

$$v_{丙} = v_{乙} \quad \Rightarrow \quad r_{丙}\omega_{丙} = r_{乙}\omega_{乙} \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_{丙}}{\omega_{乙}} = \frac{r_{乙}}{r_{丙}} = \frac{2}{3}$$

$$v_{甲} = v_{丁} \quad \Rightarrow \quad r_{甲}\omega_{甲} = r_{丁}\omega_{丁} \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_{甲}}{\omega_{丁}} = \frac{r_{丁}}{r_{甲}} = \frac{1}{5}$$

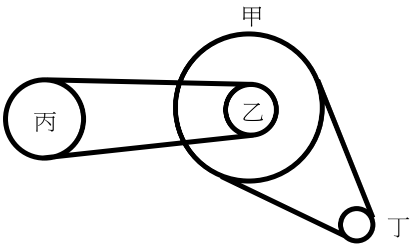
又 $\omega_{甲} = \omega_{乙}$ $\quad \frac{\omega_{丙}}{\omega_{丁}} = \frac{2}{15}$

(2) 因切線加速度相同

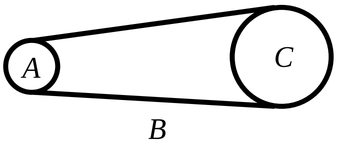
$$a_{甲} = a_{丁} \quad \Rightarrow \quad r_{甲}\alpha_{甲} = r_{丁}\alpha_{丁} \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha_{甲}}{\alpha_{丁}} = \frac{r_{丁}}{r_{甲}} = \frac{1}{5}$$

又 $\alpha_{甲} = \alpha_{乙}$ $\quad \frac{\alpha_{乙}}{\alpha_{丁}} = \frac{1}{5}$

(3) $\frac{v_{乙}}{v_{丁}} = \frac{r_{乙}\omega_{乙}}{r_{丁}\omega_{丁}} = \frac{2\times1}{1\times5} = \frac{2}{5}$



例題：



半徑 10 cm 的 A 輪以傳送帶 B 與半徑 25 cm 的 C 輪耦合如圖。A 自靜止以 $\pi/2\ rad/s^2$ 之角加速度旋轉，當 C 之轉速達到 100 $rev/\min$ 時，全程歷時多久？

［解析］：

因切線加速度相同　$a_A = a_C \;\Rightarrow\; r_A\alpha_A = r_C\alpha_C \;\Rightarrow\; \alpha_C = \dfrac{\pi}{5}$

$$\omega_c = 100\,(rpm) = 100\times\frac{2\pi}{60} = \frac{10\pi}{3}\,(rad/s)$$

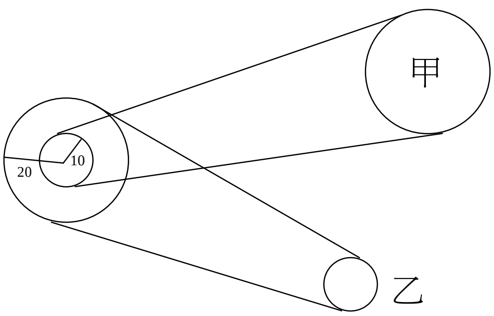
$$\omega = \omega_0 + \alpha t \;\Rightarrow\; \frac{10\pi}{3} = 0 + \frac{\pi}{5}\times t \;\Rightarrow\; t = \frac{50}{3}\,(\sec)$$

例題：

一電動機之轉速為 1800 rev/min，在其軸上有兩個滑輪，其半徑各為 10 cm 與 20 cm。求

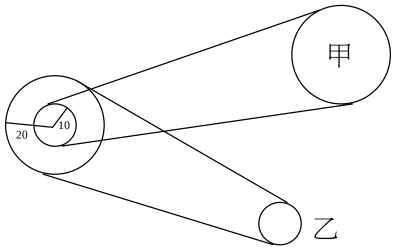
(1)滑輪表面上之線速度為多少？

(2)此二滑輪可用皮帶與半徑 20 cm 之甲滑輪、半徑 10 cm 之乙滑輪相連，如圖所示。則甲、乙兩滑輪之轉速(轉/秒)各為若干？



[解析]： $\omega = 1800\ (rpm) = 1800 \times \dfrac{2\pi}{60} = 60\pi\ (rad/s)$

$$\omega = 1800\ (rpm) = \frac{1800}{60} = 30\ (revolution/s)$$



(1) $v_{10} = 0.1\omega = 0.1 \times 60\pi = 6\pi\ (m/s)$

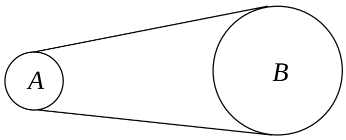
$v_{20} = 0.2\omega = 0.2 \times 60\pi = 12\pi\ (m/s)$

(2) 因切線速度相同

$$v_{10} = v_{甲} \Rightarrow r_{10}\omega_{10} = r_{甲}\omega_{甲} \Rightarrow \omega_{甲} = \frac{r_{10}}{r_{甲}}\omega_{10} = \frac{1}{2}\omega_{10} = 15$$

$$v_{20} = v_{乙} \Rightarrow r_{20}\omega_{20} = r_{乙}\omega_{乙} \Rightarrow \omega_{乙} = \frac{r_{20}}{r_{乙}}\omega_{20} = 2\omega_{10} = 60$$

例題：



如圖所示，A、B 兩輪半徑分別為 10 cm 與 25 cm，A 輪由靜止加速，角加速度 $\alpha_A = \pi/2\ rad/s^2$，帶動 B 輪(假設皮帶不滑動)，使 B 輪轉速達 10 轉/秒，需時幾秒？

[解析]：

因切線加速度相同 $a_A = a_B \Rightarrow r_A\alpha_A = r_B\alpha_B$

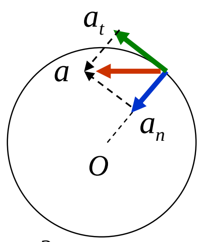
$$\alpha_B = \frac{r_A}{r_B}\alpha_A = \frac{10}{25}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{5}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow 10 \times 2\pi = 0 + \frac{\pi}{5} \times t \Rightarrow t = 100\ (\text{sec})$$

第 4-5 節 等速率圓周運動與向心力

(1)切線速度：

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{r\Delta\theta}{\Delta t}=r\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=r\omega=\frac{2\pi r}{T}\quad (m/s)$$



(2)加速度： $\vec{a}=\vec{a}_t+\vec{a}_n$ $\quad |\vec{a}|=\sqrt{|\vec{a}_t|^2+|\vec{a}_n|^2}$

(a)切線加速度：改變切線方向速率

$$a_t=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{r\Delta\omega}{\Delta t}=r\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=r\alpha\quad (m/s^2)$$

(b)法線(向心)加速度：改變運動方向，必指向圓心。

$$a_n=r\omega^2=\frac{v^2}{r}=\frac{4\pi^2 r}{T^2}\quad (m/s^2)$$

(3)向心力： $F=ma_n=mr\omega^2=m\frac{v^2}{r}=m\frac{4\pi^2 r}{T^2}\quad (N)$

例題：

沿曲線運動的物體

(A)向心力關係式 $F=m\frac{v^2}{R}$，適用於任何時刻

(B)路徑越彎曲，曲率越大

(C)路徑越彎曲，曲率半徑越大

(D)若速率不變，則向心力越大處，路徑的曲率半徑越大

(E)物體所受淨力必為零

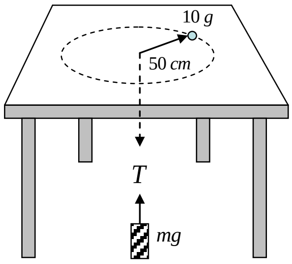
[解答]：

(A)(B)

例題：

一細線長 50 cm ，一端繫 10 g 的小錘，另一端固定於光滑水平桌面上做為圓心。今以 3 週/秒 的頻率，在該水平桌面上使細線及小錘轉動時，細線恰行斷裂。若以此細線鉛直懸吊一物，最大可吊多少質量？($g=10m/s^2$)

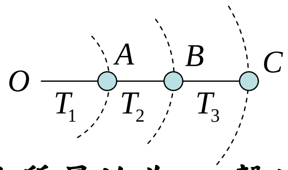
[解答]：



$$T = mr\omega^2 = 0.01\times0.5\times(3\times2\pi)^2 = 1.8\,(N)$$

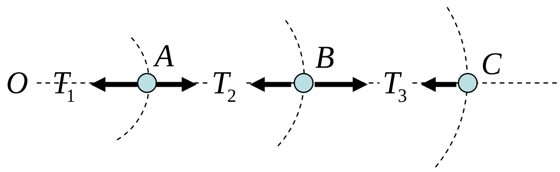
$$T = mg = 1.8\,(N) \quad\Rightarrow\quad m = 0.018\,(Kg)$$

例題：



如圖所示， A ， B ， C 三物質量均為 m 繫於繩上， 三段繩長均為 L 。 今以 O 點作為圓心做等速率圓周運動， 則繩子張力比 T_1:T_2:T_3 = ？

[解答]：



$$\begin{cases} T_3 = m(3L)\omega^2 = 3mL\omega^2 \\ T_2 - T_3 = m(2L)\omega^2 \\ T_1 - T_3 = m(L)\omega^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_3 = 3mL\omega^2 \\ T_2 = 5mL\omega^2 \\ T_1 = 6mL\omega^2 \end{cases}$$

$$T_3 : T_2 : T_1 = 6:5:3$$

例題：

自然長度為 20 cm 的彈簧，一端懸掛 50 g 的物體，以另一端為中心在光滑水平桌面做圓周運動。當頻率為 4 次/秒 時彈簧長 24 cm；若頻率為 6 次/秒 時彈簧長為若干？

[解答]：

$$F = m\frac{4\pi^2 r}{T^2} = m4\pi^2 rf^2$$ 設彈簧彈性係數為 k

$$\begin{cases} \dfrac{(24-20)}{100}k = 0.05\times 4\pi^2\times 0.24\times 4^2 \\ \dfrac{(x-20)}{100}k = 0.05\times 4\pi^2\times \dfrac{x}{100}\times 6^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{24-20}{x-20} = \frac{0.24\times 4^2}{\frac{x}{100}\times 6^2}$$

$$x = 32\ (cm)$$

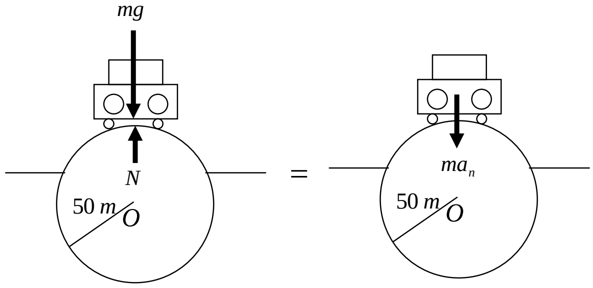
例題：

一小山丘的頂部附近可視為一半徑為 50 m 的球面。某人開車越過山頂時，車速必須小於______km/h ，才不至於在山頂飛離地面？(g=10 m/s^2)

[解答]：

$$mg - N = ma_n = m\frac{v^2}{50} \Rightarrow N = mg - m\frac{v^2}{50} \geq 0 \Rightarrow v^2 \leq 50g$$

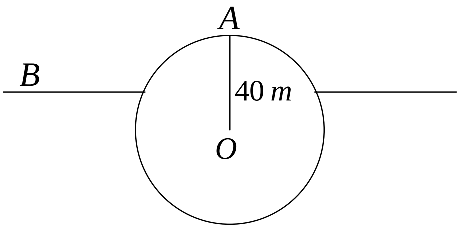
$$v \leq \sqrt{50\times 10}\ (m/s) = \sqrt{50\times 10}\times\frac{60\times 60}{1000}\ (Km/hr) = 36\sqrt{5}\ (Km/hr)$$



例題：

如圖所示，一圓形山丘 A 點為山丘的最高點，此圓形山丘的曲率半徑為 40 m 。今有一體重 50 Kgw 的滑雪者要越過此山丘，假設空氣阻力及滑雪道的摩擦力皆可忽略，A 點與 B 點的高度差為 13.8 m 。 若滑雪者由 B 點出發，通過 A 點恰能水平飛出。則他在 B 點的最小速率為多少？

(g=10 m/s^2)



[解答]：

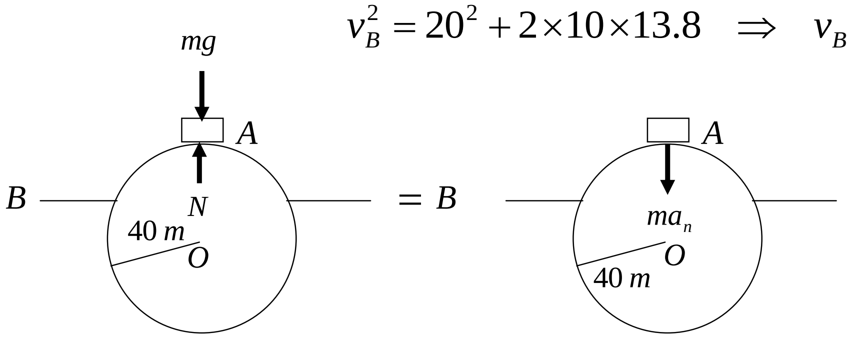
先求出滑雪者越過 A 點速率

$$mg - N = ma_n = m\frac{v^2}{40} \Rightarrow N = mg - m\frac{v^2}{40} \geq 0 \Rightarrow v^2 \leq 40g$$

$$v \leq \sqrt{40\times 10}\ (m/s) = 20\ (m/s)$$

由力學能守恆 $\frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgh \Rightarrow v_B^2 = v_A^2 + 2gh$

$$v_B^2 = 20^2 + 2\times 10\times 13.8 \Rightarrow v_B = 26\ (m/s)$$



錐動擺

擺長為 L 的擺球沿水平面做等速率圓周運動，稱為錐動擺。

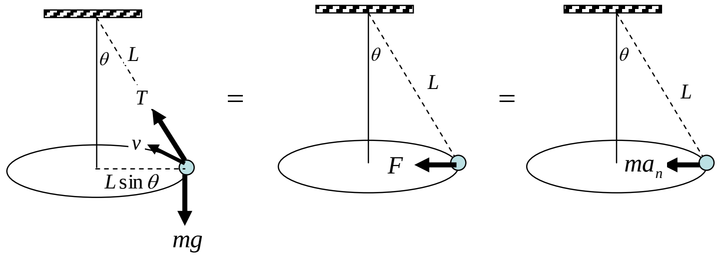
(1)擺球所受力量：重力 mg 、繩的張力 T $T\cos\theta = mg$

(2)合力：向心力 $F = T\sin\theta = mg\tan\theta$

(3)向心加速度： $F = mg\tan\theta = ma_n \quad \Rightarrow \quad a_n = g\tan\theta$

(4)切線速度： $a_n = g\tan\theta = \dfrac{v^2}{L\sin\theta} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{gL\tan\theta\sin\theta}$

(5)擺動週期： $a_n = g\tan\theta = \dfrac{4\pi^2(L\sin\theta)}{T^2} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L\cos\theta}{g}}$



例題：

如圖，錐動擺為一質量 m 的小球繫於輕繩的下端，繩的上端固定，小球以等速率做水平圓周運動，輕繩在空中掃轉一圓錐面。若已知繩長為 L ， 繩和鉛直方向的夾角 θ，則

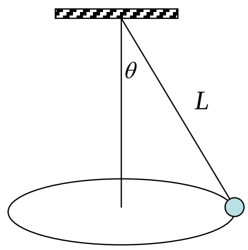
(A)繩上張力為 $mg\sec\theta$

(B)小球轉動的軌道半徑為 $L\sin\theta$

(C)小球的軌道速率為 $\sqrt{gL\tan\theta}$

(D)小球的切線加速度大小為 $g\tan\theta$

(E)小球運轉週期為 $2\pi\sqrt{L\cos\theta/g}$

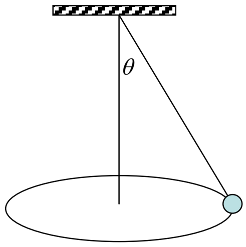


[解答]：

(A)(B)(E)

例題：

如圖所示，使單擺的擺錘在水平面上做等速率圓周運動時，向心力是



(A)繩上的張力　(B)物體的重量

(C)張力與重力的合力　(D)張力的垂直分量

[解答]：

(C)

例題：

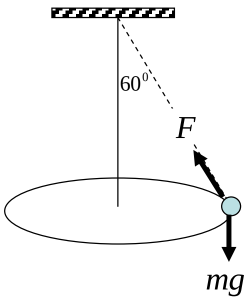
長 L 之彈簧下懸質量 m 之物體，靜止時之長為 1.5L ，使此裝置做錐動擺使用。 當幅角為 60^0 時，此彈簧之長度變為多少？

[解答]：

$$mg = k(1.5L - L) \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2mg}{L}$$

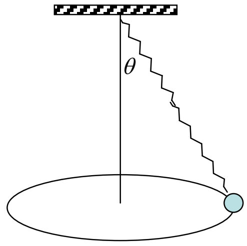
$$F\cos 60^0 = mg \quad \Rightarrow \quad F = 2mg$$

$$F = 2mg = k(L' - L) \quad \Rightarrow \quad L' = 2L$$



例題：

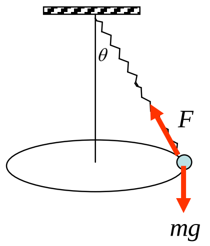
有一彈簧長 10 厘米，將一端固定而在另一端懸掛一物體時伸長 2 厘米。若以通過固定端的鉛直線為軸使該物體旋轉，則在測得彈簧長為 14 厘米時，彈簧和旋轉軸間的角度 θ 為幾度？



[解答]：

設物體質量為 m，彈簧彈性係數為 k。$mg=0.2k$

圖中，彈簧長為 14 厘米時， $F=0.4k=2mg$



$$F\cos\theta=mg \quad\Rightarrow\quad \cos\theta=\frac{mg}{F}=\frac{mg}{2mg}=\frac{1}{2}$$

$$\theta=60^0$$

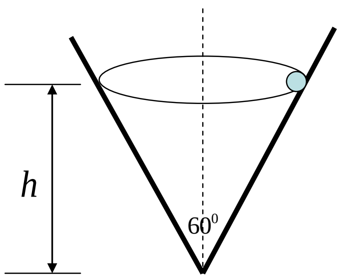
例題：

如圖所示，質量為 m 之小球在一頂角為 60^0 之光滑玻璃漏斗上距地面高 h 之水平面上做等速率圓周運動。則

(1)小球作用於漏斗壁上的正向力為若干？

(2)球旋轉週期為若干？

[解答]：

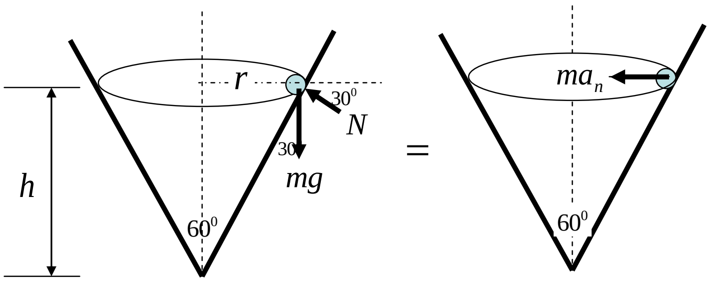


[解答]： $r = h\tan 30^0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}h$

(1) $N\sin 30^0 = mg \quad \Rightarrow \quad N = 2mg$

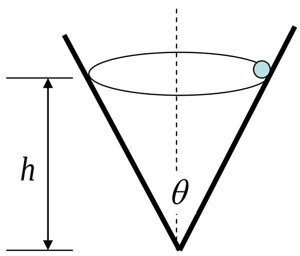
(2) $N\cos 30^0 = ma_n = m\dfrac{4\pi^2 r}{T^2} = m\dfrac{4\pi^2 \dfrac{1}{\sqrt{3}}h}{T^2}$

$$2mg\cos 30^0 = m\frac{4\pi^2 \dfrac{1}{\sqrt{3}}h}{T^2} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{3g}}$$



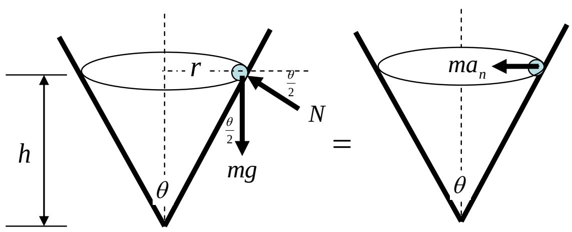
例題：

如圖所示，一小物體在錐頂角 $\theta = 37^0$ 的光滑圓錐內面上進行等速率圓周運動，其軌跡與錐頂相距 $h = 45\,cm$，則此物體的旋轉速率為多少？



[解答]：

$$r = h\tan\frac{\theta}{2}$$



$$\begin{cases} N\sin\dfrac{\theta}{2} = mg \\ N\cos\dfrac{\theta}{2} = m\dfrac{v^2}{h\tan\dfrac{\theta}{2}} \end{cases} \Rightarrow \quad \tan\frac{\theta}{2} = \frac{gh\tan\dfrac{\theta}{2}}{v^2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{gh}$$

彎道路面的傾斜角

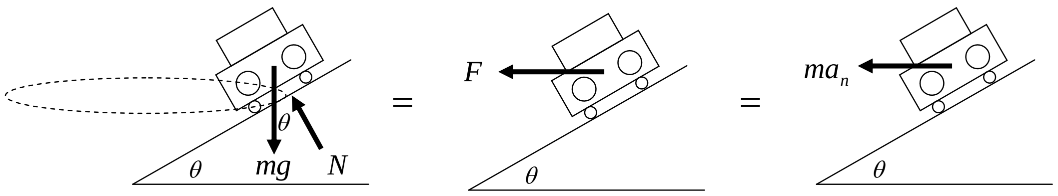
車子在半徑為 r 角度為 θ 的彎道路面上行駛，若無滑動現象，即不上滑或下滑，此時無摩擦力產生。

(1)車子所受力量：重力 mg 、地面正向力 N $N\cos\theta = mg$

(2)合力：向心力 $F = N\sin\theta = mg\tan\theta$

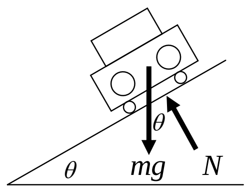
(3)向心加速度： $F = mg\tan\theta = ma_n \Rightarrow a_n = g\tan\theta$

(4)車子安全速度： $a_n = g\tan\theta = \dfrac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{gr\tan\theta}$

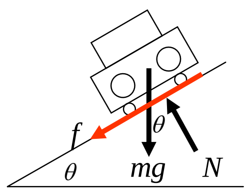


車子行駛於安全速率時，在車子輪子上沒有摩擦力。

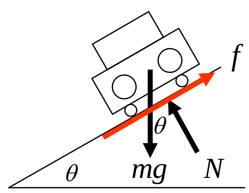
(1) 若車速度 $v = \sqrt{gr\tan\theta}$，此時車子不需靠摩擦力，恰可轉彎。



(2)若車速度 $v > \sqrt{gr\tan\theta}$，此時車子需靠斜向下的摩擦力，才可轉彎，否則上滑。



(3)若車速度 $v < \sqrt{gr\tan\theta}$，此時車子需靠斜向上的摩擦力，才可轉彎，否則下滑。



例題：

設計彎道的路面時會考慮路面的傾斜角，下列何者與此有關？

(A)車輛的速率　　**(B)**車輛的重量

(C)彎道的道路半徑　　**(D)**當地的重力加速度

[解答]：

(A)(C)(D)

例題：

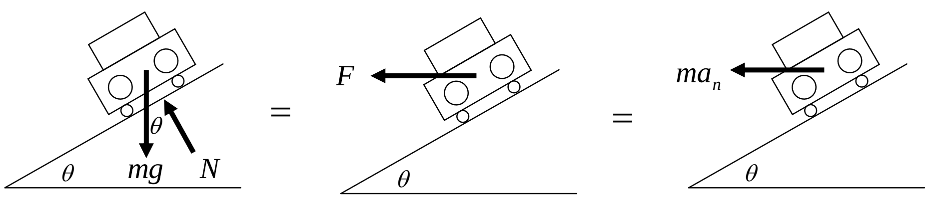
以 36 km/hr 的速度在半徑 200 m 的彎路上行駛火車，欲使鐵軌不受側壓，則外側鐵軌應較內側鐵軌高出若干？(假設二鐵軌之間距離為 120 cm ， g=10 m/s^2)

[解答]：

$$36\,(km/hr) = 36 \times \frac{1000}{60 \times 60} = 10\,(m/s)$$

$$v = \sqrt{gr\tan\theta} \quad \Rightarrow \quad 10 = \sqrt{10 \times 200\tan\theta} \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{1}{20}$$

外側鐵軌應較內側鐵軌高出： $120\sin\theta \approx 120\tan\theta = 6\,(cm)$



例題：

在圓形公路的轉彎處，將轉彎處路面築成斜面， 外側較高。若不考慮地面摩擦力， 以 R 表示彎路半徑， v 表示行車速率， g=10 m/s^2 。若在相同的傾斜路面上行駛， 當 v=6 m/s ，R 的最大極限為 12 m ，則下列何項行車資料可以確保行車安全(不往外滑動)？

(A) v=10 m/s ，R= 5 m　**(B)** v=8 m/s ，R= 10 m

(C) v=9 m/s ，R= 18 m　**(D)** v=5 m/s ，R= 8 m

(E) v=7 m/s ，R= 17 m

[解答]： **(E)** $v=\sqrt{gr\tan\theta}$

車子欲安全行駛，需 $\frac{v^2}{R}=a_n=g\tan\theta \Rightarrow \tan\theta=\frac{v^2}{gR}$

當 $v=6\,(m/s)$ 、 $R=12\,(m)$　$6^2=10\times12\tan\theta \Rightarrow \tan\theta=\frac{3}{10}$

(A) $v=10\,(m/s)$　$R=5\,(m)$　$v=\sqrt{10\times5\times\frac{3}{10}}=\sqrt{15}<10$ **(往外滑動)**

(B) $v=8\,(m/s)$　$R=10\,(m)$　$v=\sqrt{10\times8\times\frac{3}{10}}=\sqrt{24}<8$ **(往外滑動)**

(C) $v=9\,(m/s)$　$R=18\,(m)$　$v=\sqrt{10\times18\times\frac{3}{10}}=\sqrt{54}<9$ **(往外滑動)**

(D) $v=5\,(m/s)$　$R=8\,(m)$　$v=\sqrt{10\times8\times\frac{3}{10}}=\sqrt{24}<5$ **(往外滑動)**

(E) $v=7\,(m/s)$　$R=17\,(m)$　$v=\sqrt{10\times17\times\frac{3}{10}}=\sqrt{51}>7$

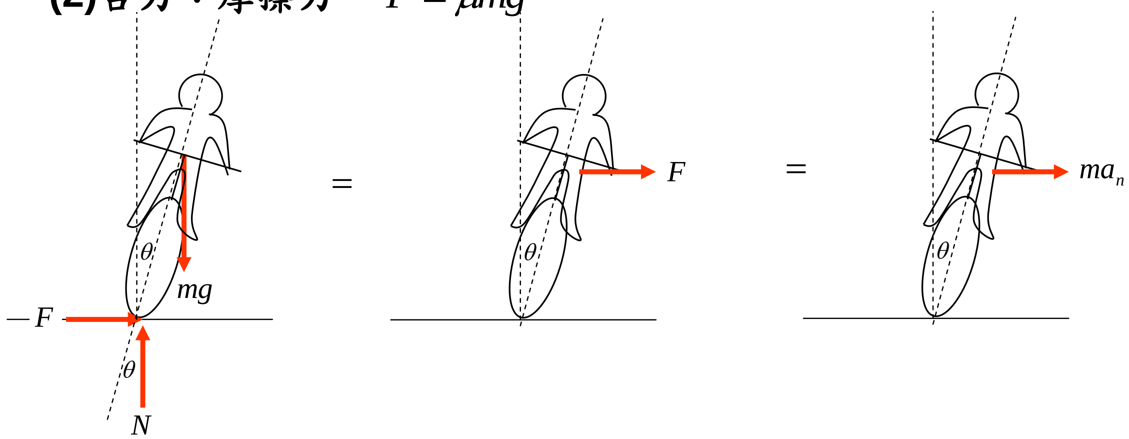
水平粗糙路面的轉彎

一人騎腳踏車以 v 的速度前進，當其進入水平彎路後車身傾斜一角度 θ，腳踏車與地面間的摩擦係數為 μ。

(1)車子所受力量： 重力 mg 、地面正向力 N　　$N = mg$

摩擦力 $F = \mu mg = N\tan\theta \;\Rightarrow\; \mu = \tan\theta$

(2)合力：摩擦力　$F = \mu mg$

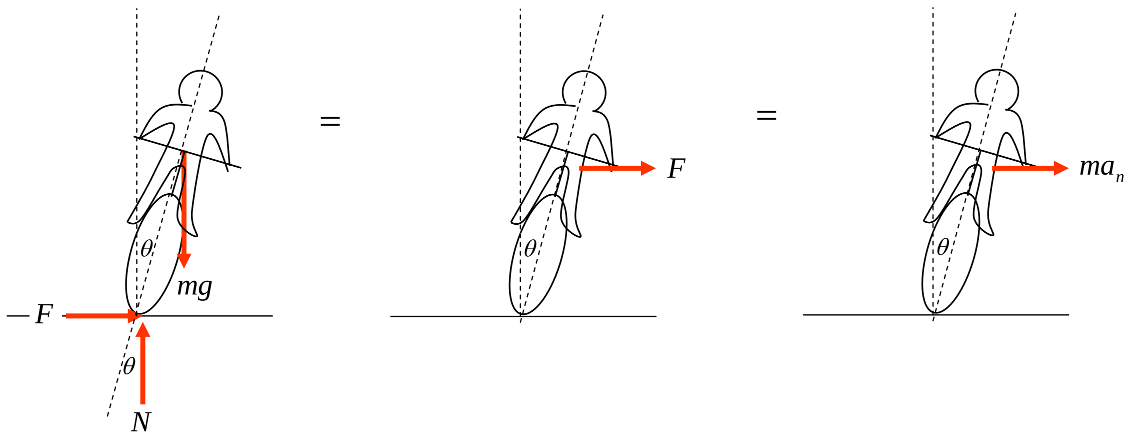


(3)向心加速度：　$F = \mu mg = ma_n \;\Rightarrow\; a_n = \mu g$

(4)車子安全速度：　$a_n = \mu g = \dfrac{v^2}{r} \;\Rightarrow\; v = \sqrt{\mu gr}$

(5)鉛直線傾斜角度 θ：　$a_n = \mu g = \tan\theta g = \dfrac{v^2}{r} \;\Rightarrow\; \tan\theta = \dfrac{v^2}{gr}$

公式同彎道路面的傾斜角

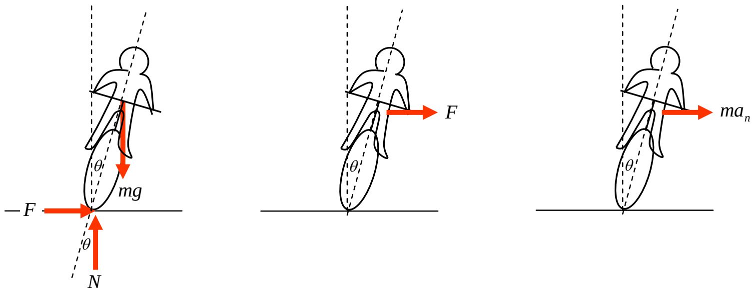


例題：

一人騎腳踏車以 10 m/s 的速度前進，當其進入水平彎路後車身傾斜一角度。若彎路之曲率半徑為 20 m ，則車身與鉛直方向所成角度為幾度？車輪與路面摩擦係數最小需為多少？（g=10 m/s²）

[解答]： $mg\tan\theta = ma_n = m\dfrac{v^2}{r} \Rightarrow \tan\theta = \dfrac{v^2}{gr}$

$$\tan\theta = \frac{10^2}{10\times 20} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}0.5 \qquad \mu = \tan\theta = \frac{1}{2}$$



例題：

一公路上有一圓弧形彎道，係為 60 Km/hr 的車速設計

(1)若圓弧半徑為 R=150 m ，則此公路的傾斜角 θ 應為若干？

(2)若彎道不傾斜，如仍欲維持行車安全，則輪胎與路面間的靜摩擦係數最小為多少？（g=10 m/s²）

[解答]：

$$60\,(km/hr) = 60\times\frac{1000}{60\times 60} = \frac{50}{3}\,(m/s)$$

(1) $\begin{cases} N\cos\theta = mg \\ N\sin\theta = m\dfrac{v^2}{r} \end{cases} \Rightarrow \tan\theta = \dfrac{v^2}{gr} = \dfrac{(\frac{50}{3})^2}{10\times 150} = \dfrac{5}{27}$

(2) $\mu = \tan\theta = \dfrac{5}{27}$

例題：

假若輪胎與濕的瀝青路面間的摩擦係數為 0.5，今於一曲率半徑為 40 公尺的平坦公路轉彎處車子的最大安全速度為若干？(g=10 m/s^2)。最大安全速度與車子質量是否有關？

[解答]：

$$\mu = \tan\theta = \frac{v^2}{gr} \quad \Rightarrow \quad 0.5 = \frac{v^2}{10 \times 40}$$

$$v = 10\sqrt{2}\ (m/s)$$

最大安全速度與車子質量是否無關

第 9-3 9-4 9-5 角動量與角動量守恒定律

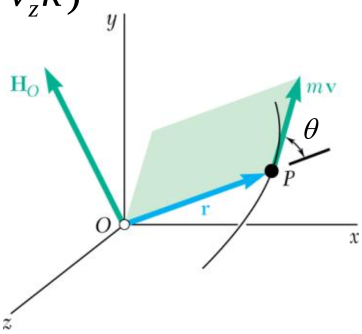
角動量(動量矩)的定義：

一質量為 m 的質點，對原點 O 的位置向量為 $\vec{r}$，線動量為 $m\vec{v}$，定義質點 m 對原點 O 的角動量為

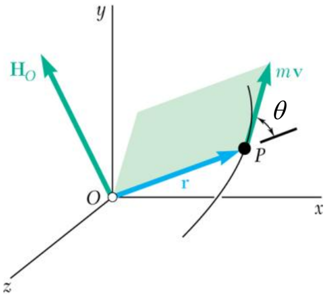
$$\vec{H}_o = \vec{r} \times m\vec{v} \qquad \text{單位}: Kg \cdot m^2/s$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad m\vec{v} = m(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k})$$

$$\vec{H}_o = \vec{r} \times m\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix}$$



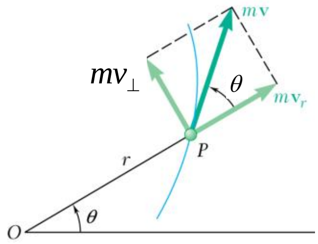
$$\left|\vec{H}_o\right| = rm\underbrace{v\sin\theta}_{v_\perp} = rm\underbrace{v_\perp}_{r\omega} = mr^2\omega$$

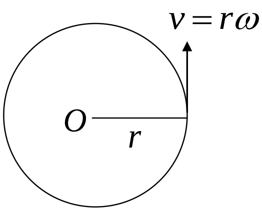


其中，θ 為 $\vec{r}$ 與 $m\vec{v}$ 的夾角，$\vec{H}_o$ 是垂直於包含 $\vec{r}$ 與 $m\vec{v}$ 的平面。$\vec{H}_o$ 的方向可由 $\vec{r}$ 及 $m\vec{v}$ 的右手螺旋定則來決定。

圓周運動的角動量：

$$\left|\vec{H}_o\right| = mr^2\omega$$





例題：

質量均分別為 10 Kg 之三質點在水平面上距參考原點東方 5 m 處以相同速率 6 m/s 分別向

(1)南方　(2)東偏北 37^0 方向　(3)西方

運動，求三質點對原點之角動量各若干？

[解析]：$\vec{r} = 5\vec{i}$　$\vec{H}_o = \vec{r}\times m\vec{v}$

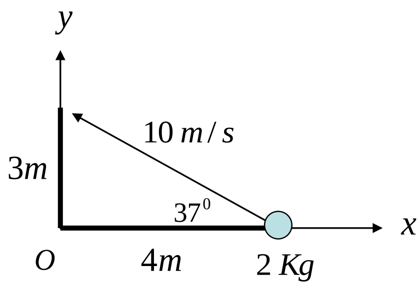
(1) $\vec{H}_o = 5\vec{i}\times 10(-6\vec{j}) = -300\vec{k}$

(2) $\vec{H}_o = 5\vec{i}\times 10(6\cos 37^0\,\vec{i} + 6\sin 37^0\,\vec{j}) = 180\vec{k}$

(3) $\vec{H}_o = 5\vec{i}\times 10(-6\vec{i}) = 0$

例題：

如圖所示，在水平面上一質點質量 2 Kg，以 10 m/s 之速度向西偏北 37 度運動，則此質點相對於原點 O 之角動量為何？



［解析］：

$$\vec{H}_o = 4\vec{i} \times 2(-10\cos 37^0 + 10\sin 37^0\,\vec{j}) = 48\vec{k}$$

例題：

有 2 Kg 的物體在 XY 平面上以 $v_x = 30\,m/s$ 及 $v_y = 60\,m/s$ 的速度通過點 $(x, y) = (3\,m, -4\,m)$。試求該質點對

(1)原點 (2) $(-2\,m, -2\,m)$ 之角動量各若干？

［解析］：

$$\vec{H} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

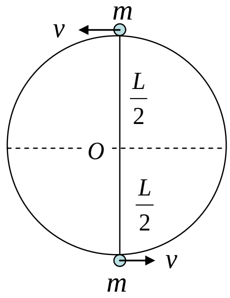
(1) $$\vec{H} = (3\vec{i} - 4\vec{j}) \times 2(30\vec{i} + 60\vec{j}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -4 & 0 \\ 60 & 120 & 0 \end{vmatrix} = 600\vec{k}$$

(2) $$\vec{H} = \underbrace{(5\vec{i} - 2\vec{j})}_{\vec{r}} \times 2(30\vec{i} + 60\vec{j}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -2 & 0 \\ 60 & 120 & 0 \end{vmatrix} = 720\vec{k}$$

例題：

某獨立系統中，有質量皆為 m 的雙星，相距 L，且互繞質量中心旋轉，線線率為 v。則對質量中心的角動量應為多少？

［解析］：



$$\vec{H}_o = \frac{L}{2}mv + \frac{L}{2}mv = Lmv$$

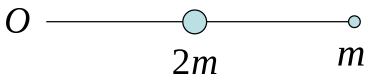
例題：

質量為 m 的物體在平面上以角速度 ω 做半徑為 r 的等速率圓周運動，則物體所受的外力合力為何？物體的角動量為多少？

［解析］：

(1)外力為向心力 $F = mr\omega^2$

(2)角動量 $H = rmv = mr^2\omega$



例題：

質量比為 2:1 的 A、B 兩物，以等長的二條輕繩連接好後，使其共繞 O 點做等速率圓周運動。則 A、B 兩點之

(A)角速度比為 1:2

(B)切線速率比為 1:2

(C)動量大小比為 1:2

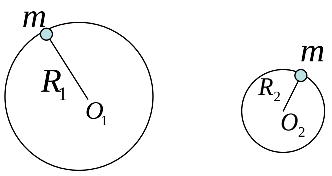
(D)對 O 點角動量比為 1:2

(E)向心加速度大小比為 1:2

［解析］：

(B)(D)(E)

例題：



兩條長度分別為 R_1 及 R_2 的細繩，各有一端固定在一光滑水平面上的 O_1 及 O_2 點。細繩之另一端分別繫有質量同為 m 的小物體，並使小物體在水平面上做等速率圓周運動，如圖所示。已知 $R_1 = 2R_2$，下列有關兩細繩張力 F_1 與 F_2 之比值敘述，何者正確？

(A)如兩物體之角速度比為 $\omega_1/\omega_2 = 2$，則 $F_1/F_2 = 8$

(B)如兩物體之速率比為 $v_1/v_2 = 2$ ，則 $F_1/F_2 = 4$

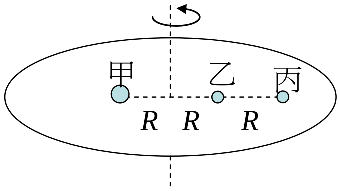
(C)如兩物體之圓周運動週期比為 $T_1/T_2 = 2$ ，則 $F_1/F_2 = 2$

(D)如兩物體之動能比為 $E_1/E_2 = 2$ ，則 $F_1/F_2 = 1$

(E)如兩物體之角動量比為 $L_1/L_2 = 8$ ，則 $F_1/F_2 = 1/2$

［解析］： **(A)(D)(E)**

例題：



質量 2m、m、m 的甲、乙、丙三物體，放在旋轉盤上。它們與軸心的距離分別為 R、R、2R。當圓盤以等角速度旋轉而物體在圓盤相對靜止時，各物體所受的向心力及對軸心 O 的角動量為何？

(A)甲所受的向心力最小，甲對 O 點的角動量最小

(B)甲所受的向心力最小，乙對 O 點的角動量最小

(C)乙所受的向心力最小，乙對 O 點的角動量最小

(D)丙所受的向心力最小，丙對 O 點的角動量最小

(E)乙所受的向心力最小，甲、乙對 O 點的角動量相等

［解析］：

(C)

例題：

質量比為 2:1 之雙星在外太空繞其共同質心運轉，則兩者的

(A)角速度大小比 1:1　　(B)向心加速度大小比 1:2

(C)動能比 2:1　　(D)面積速度比 1:2

(E)角動量大小比 2:1

［解析］：

(A) $\omega_1 : \omega_2 = 1:1$

(B) $R_1 : R_2 = 1:2$　　$a_1 : a_2 = R_1\omega_1 : R_2\omega_2 = 1:2$

(C) $v = R\omega$　　$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 : \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = 2\times R_1^2 : 1\times R_2^2 = 1:2$

(D) $\frac{dA}{dt} = \frac{\pi R^2}{T}$　　$(\frac{dA}{dt})_1 : (\frac{dA}{dt})_2 = R_1^2 : R_2^2 = 1:4$

(E) $m_1 R_1^2 \omega_1 : m_2 R_2^2 \omega_2 = 2\times R_1^2 : 1\times R_2^2 = 1:2$　　**(A)(B)**

例題：

質量 m 的人造衛星，正以角動量 L 在赤道上繞地軸做半徑 r 的等速率圓周運動求人造衛星的

(1)動能 K　(2)重力位能 U　(3)力學能 E

[解析]：

$$L = rmv \quad \Rightarrow \quad v = \frac{L}{rm}$$

(1) $K = \frac{GMm}{2r} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\frac{L}{rm})^2 = \frac{L^2}{2r^2m}$

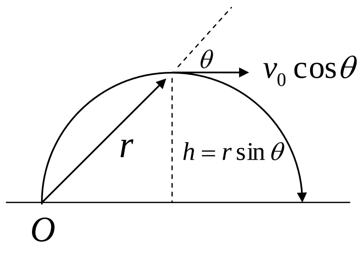
(2) $U = -\frac{GMm}{r} = -\frac{L^2}{r^2m}$

(3) $E = -\frac{GMm}{2r} = -\frac{L^2}{2r^2m}$

例題：

質量為 2 kg 的質點以 25 m/s 的初速度、拋射仰角為 53^0 斜向拋出。求當到達最大高度時，該質點對拋出原點之角動量為多少？（ $g = 10\ m/s^2$）

[解析]：



質點最大高度： h

$$h = \frac{(v_o \sin\theta)^2}{2g} = \frac{(25\sin 53^0)^2}{2\times 10} = 20$$

$$|\vec{H}_o| = |\vec{r} \times m\vec{v}| = rmv\sin\theta = (r\sin\theta)mv = hm(v_0\cos\theta)$$

$$|\vec{H}_o| = 20\times 2\times(25\cos 53^0) = 600\ (Kg\cdot m^2/s)$$

剛體(或質點系統)的轉動慣量

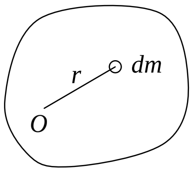
質點系統的轉動慣量：

若質點 m_i 與點(軸) O 的距離為 r_i，則質點系統的轉動慣量為

$$I=\sum_i m_i r_i^2 \qquad 單位:Kg\cdot m^2$$

剛體的轉動慣量：（培訓教材）

$$I=\int r^2 dm$$



平行軸定理：（培訓教材）

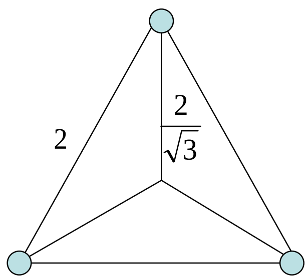
若系統對點(軸) O 的慣性矩為 I_o，且點(軸) O 與點(軸) O' 的距離為 d，則系統對點(軸) O' 的慣性矩為

$$I_{o'}=I_o+(\sum_i m_i)d^2$$

例題：

三質點質量皆為 2 Kg，各位於一正三角形(邊長 2 m)的三頂點。如三角形以過其重心之法線為轉動軸轉動，則其轉動慣量為多少？

[解析]：



$$I=\sum_{i=1}^{3} m_i r_i^2=3[2\times(\frac{2}{\sqrt{3}})^2]=8\,(Kg\cdot m^2)$$

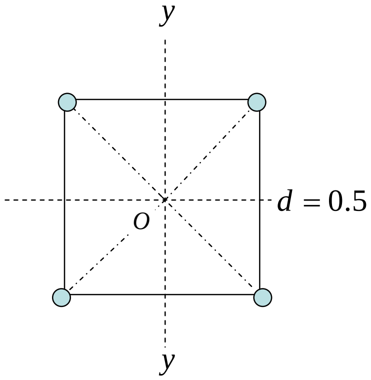
例題：

質量各為 3 Kg 的四個小物體，排成邊長 0.5 m 的正方形，物體間以輕棒連接。求對下列各轉軸之轉動慣量。

(1)經過正方形中間，垂直於正方形平面之軸

(2)等分正方形且平行兩對邊之軸

[解析]：



(1) $I_O=\sum_{i=1}^{4}m_ir_i^2=4[3\times(\frac{0.5}{\sqrt{2}})^2]=\frac{3}{2}\,(Kg\cdot m^2)$

(2) $I_{y-y}=\sum_{i=1}^{4}m_ir_i^2=4[3\times(\frac{0.5}{2})^2]=\frac{3}{4}\,(Kg\cdot m^2)$

角動量的變化率：

作用於質點 O 的合力對 O 點的合力矩等於質點對 O 點角動量的變化率。

$$\dot{\vec{H}}_o=\sum\vec{M}_o$$

[證明]：

$$\vec{H}_o=\vec{r}\times m\vec{v}$$

$$\dot{\vec{H}}_o=\dot{\vec{r}}\times m\vec{v}+\vec{r}\times m\dot{\vec{v}}=\vec{v}\times m\vec{v}+\vec{r}\times m\vec{a}$$

$$\dot{\vec{H}}_o=0+\vec{r}\times\sum\vec{F}$$

$$\sum\vec{M}_o=\vec{r}\times\sum\vec{F}$$

角動量守恆的情況： (1)在中心力下的運動

(2)物體所受的合力矩為零

剛體(或質點系統)的角動量

若系統對 O 點的轉動慣量為 I，系統的角速度為 ω，則系統對 O 點的角動量為 $\vec{H}_o = I\vec{\omega}$

$\vec{H}_o = I\vec{\omega}$	：給角速度
$\vec{H}_o = \vec{r}\times m\vec{v}$	：給速度

[證明]：(以質點系統為例)

$$\vec{H}_o = \sum_i \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i = \sum_i m_i r_i^2 \vec{\omega} = (\sum_i m_i r_i^2)\vec{\omega} = I\vec{\omega}$$

剛體(或質點系統)的力矩

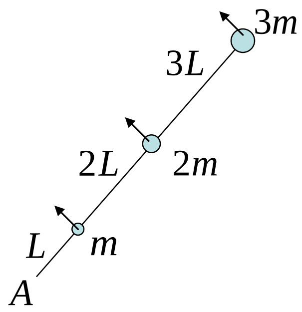
若系統對 O 點的轉動慣量為 I，系統的角速度為 ω，系統的角加速度為 α，系統對 O 點的力矩為 $\sum \vec{M}_o = \dot{\vec{H}}_o = I\vec{\alpha}$

[證明]：

$$\sum \vec{M}_o = \dot{\vec{H}}_o = I\dot{\vec{\omega}} = I\vec{\alpha}$$

例題：

質量 m、2m、3m 的小物體以輕棒串起，兩兩距離如圖所示。整個系統以角速度 ω 繞 A 做圓周運動。求對 A 而言



(1) 2m 質點的轉動慣量與角動量為何？

(2)整個系統的轉動貫量 I 與角動量 L 為多少？

[解析]：

(1) $I_A = (2m)(3L)^2 = 18mL^2$　　$\vec{H}_A = I_A\vec{\omega} = 18mL^2\omega\vec{k}$

(2) $I_A = (m)(L)^2(2m)(3L)^2 + (3m)(6L)^2 = 127mL^2$

$$\vec{H}_A = I_A\vec{\omega} = 127mL^2\omega\vec{k}$$

$\vec{H}_o = I\vec{\omega}$	：給角速度
$\vec{H}_o = \vec{r}\times m\vec{v}$	：給速度

例題：

有一厚度均勻的圓盤，轉動慣量為 $10^{-3}\ Kg\cdot m^2$**，半徑為** 10 cm**，受一與其邊緣相切的** 0.5 **牛頓之力作用而轉動。則圓盤的角加速度為多少？**

[解析]：

$$\sum \vec{M}_o = \dot{\vec{H}}_o = I\vec{\alpha}$$

$$0.5\times 0.1 = 10^{-3}\times\alpha$$

$$\alpha = 50\ (rad/s^2)$$

例題：

一質點質量為 2 Kg**，在半徑為** 2 m **的圓周上，由靜止受** 6 m-N **的力矩作用，求**

(1)**角加速度** (2) 2 **秒末之角速度** (3) 2 **秒內的角位移**

[解析]：

(1) $\sum \vec{M}_o = I\vec{\alpha}$ $\quad 6 = (2\times 2^2)\alpha \quad\Rightarrow\quad \alpha = \frac{3}{4}\,(rad/s^2)$

(2) $\omega = \alpha t = \frac{3}{2}\,(rad/s)$

(3) $\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{3}{2}\,(rad)$

例題：

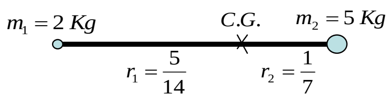
質量 $m_1=2\,Kg$ 與 $m_2=5\,Kg$ 的兩個小物體連結於長 50 cm 的輕棒兩端，整個系統正以 3 rps 之角速度繞過質心的鉛直軸旋轉。欲使此系統在 8 秒內靜止下來，則所需供給的平均力矩為多少？

[解析]：

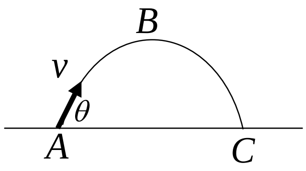
$$r_1=\frac{m_2}{m_1+m_2}\times r=\frac{5}{2+5}\times 0.5=\frac{5}{14}\qquad r_2=\frac{m_1}{m_1+m_2}\times r=\frac{2}{2+5}\times 0.5=\frac{1}{7}$$

$$I=2\times(\frac{5}{14})^2+5\times(\frac{1}{7})^2\qquad \alpha=\frac{3\times 2\pi}{8}=\frac{3\pi}{4}$$

$$\sum \vec{M}_o=I\vec{\alpha}=\frac{21\pi}{76}$$



例題：



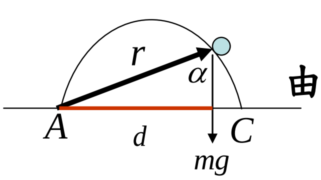
如圖所示，某砲彈由 A 點以 v 之初速度、θ 之仰角射出，經最高點 B 後掉回與 A 同一水平面的 C 點。若不計空氣阻力，則砲彈由 A→B→C 之過程中相對於 A 點之角動量大小之敘述，下列何者正確？

(A)先增加後減少　　(B)先減少後增加　　(C)一直增加

(D)始終為零　　(E)為一不為零的定值

[解析]：

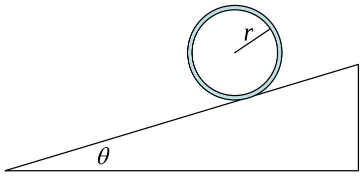
$$\vec{H}_A=\vec{r}\times m\vec{v}$$ 不易判斷



由 $\sum \vec{M}_o=\dot{\vec{H}}_o$，因 $\sum \vec{M}_o=mgr\sin\alpha=mgd$

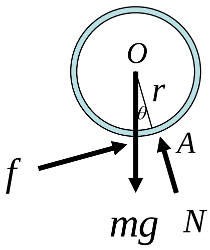
A→B→C 之過程中，距離 d 一直增大。　**(C)**

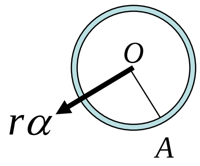
例題：



一個半徑為 r，質量為 m 的圓鐵圈沿著傾斜角為 θ 的斜面由靜止往下做純滾動。求鐵圈質心的加速度。

［解析］：設鐵圈的角加速度為 α，鐵圈與斜面交點為 A





鐵圈對圓心的轉動慣量：$I_0 = mr^2$

由平行軸定理

鐵圈對 A 點的轉動慣量：

$$I_A = I_o + mr^2 = 2mr^2$$

$$\sum \vec{M}_A = I_A \vec{\alpha} \qquad mgr\sin\theta = 2mr^2\vec{\alpha} \qquad \alpha = \frac{1}{2r} g\sin\theta$$

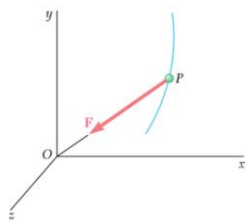
鐵圈質心的加速度：$a = r\alpha = \dfrac{1}{2} g\sin\theta$

在中心力下的運動：角動量守恆

當作用於質點 P 之唯一力為 $\vec{F}$，$\vec{F}$ 的方向是朝向或遠離固定點 O。因 $\vec{F}$ 的作用線通過 O 點，則力矩 $\sum \vec{M}_o = 0$。又

$$\dot{\vec{H}}_o = \sum \vec{M}_o$$

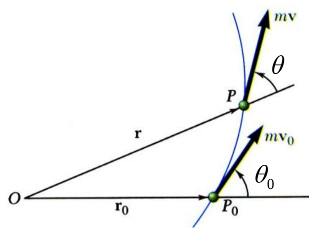
得 $\dot{\vec{H}}_o = 0$，即 $\vec{H}_o =$ 常數



質點在中心力的作用下運動時，角動量為常數。

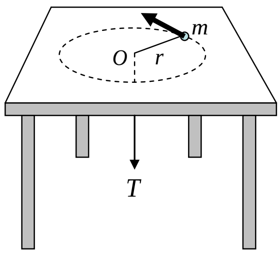
$$\vec{r} \times m\vec{V} = \vec{H}_O = \text{常數}$$

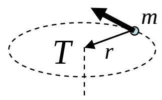
$$H_O = rm\underbrace{v\sin\theta}_{v_\perp} = r_0 m \underbrace{v_0 \sin\theta_0}_{v_{0\perp}} = \text{常數}$$



$$rv_\perp = r^2\omega = \text{常數}$$

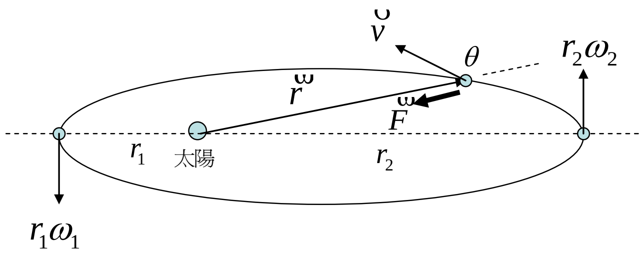
在平滑的桌面上，一繩端繫質量 m 的鋼球，穿過一小孔，並以手拉住桌下的繩另一端使 m 做等角速度圓周運動。當繩下拉時，此拉力通過轉軸 O 點，力臂為零，對 O 點的力矩和為零，則角動量守恆，$\vec{H}_o = mr_1^2\omega_1 = mr_2^2\omega_2$ 。下拉過程中 r 變小，則物體旋轉的角速率 ω 變大。



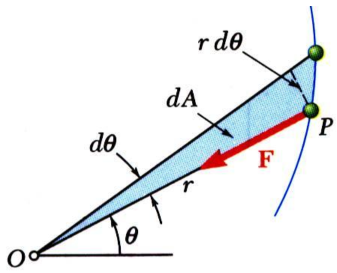


克卜勒第二定律：

行星受太陽引力 $\vec{F}$，因 $\vec{F}$與行星及太陽間的位置向量 $\vec{r}$夾角 180^0，力矩 $\left|\vec{M}_0\right| = \left|\vec{r}\right|\left|\vec{F}\right|\sin 180^0 = 0$，對太陽的力矩和為零，則角動量守恆，$\vec{H}_o = mr_1^2\omega_1 = mr_2^2\omega_2$，不論行星走到軌道上何處，角動量皆為定值。



因此，近日點 r_1 的角速率 ω_1 最大，遠日點 r_2 的角速率 ω_2 最小。

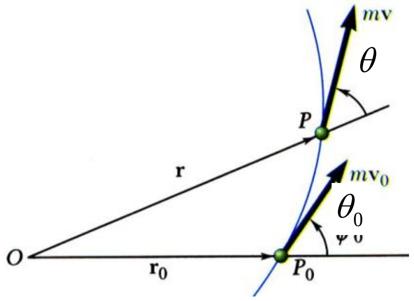


$\boxed{\frac{1}{2}rv\sin\theta = \text{常數}}$ 的幾何解釋：

半徑向量 OP 掃過一微小區域

$$dA = \frac{1}{2}r^2\sin(d\theta) \approx \frac{1}{2}r^2 d\theta$$

定義質點面積速度為



$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2\omega = \frac{1}{2}rv_\perp = \frac{1}{2}rv\sin\theta$$

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}rv\sin\theta = \frac{1}{2}r^2\omega = \frac{1}{2}rv_\perp = \frac{\pi ab}{T}}$$

T ：週期

結論：一質點若在中心力下運動，其面積速度為常數。

不同行星的面積速度並不一樣。

例題：

一行星繞太陽做橢圓軌道運動，有關此行星的敘述，下列何者錯誤？

(A)力學能守恒

(B)繞日角速度之大小與距太陽的距離平方成反比

(C)在近日點與遠日點時，移動速率與太陽的距離成反比

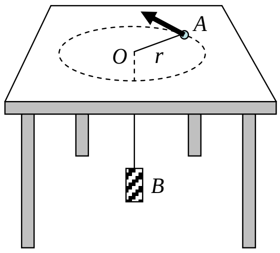
(D)角動量守恒

(E)動量守恒

[解析]：

(E)

例題：

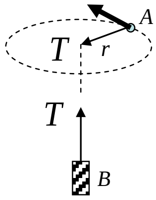


如圖所示，光滑桌面中心穿有一孔，用繩繫 5 Kg 的物體 A，通過此孔繞中心做等速圓周運動，半徑 2 m，速率 10 m/s。

(1)繩的另一端需吊物 B 之質量應為若干才能維持平衡？

(2)桌下繩的一端改用手握住緩慢向下拉 1 m，最後需施力若干？共做功多少焦耳？(g=10 m/s²)

［解析］：



(1) $T = m_B g = 10m_B$

$$T = m_A \frac{v_A^2}{r} \quad \Rightarrow \quad 10m_B = 5\times\frac{10^2}{2} \quad \Rightarrow \quad m_B = 25\,(Kg)$$

(2)因施力為一中心力，所以角動量不變。

$$rv_A = r'v_A' \quad \Rightarrow \quad 2\times 10 = 1\times v_A' \quad \Rightarrow \quad v_A' = 20\,(m/s)$$

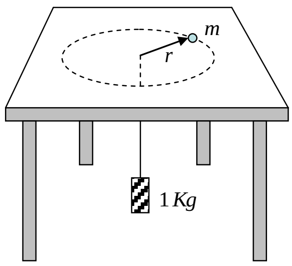
$$T = m_A \frac{v_A'^2}{r_A} = 5\times\frac{20^2}{1} = 2000\,(N)$$

由功能原理 $E_{k_1} + W = E_{k_2}$

$$W = E_{k_2} - E_{k_1} = \frac{1}{2}m_A(v_A'^2 - v_A^2) = \frac{1}{2}\times 5\times(20^2 - 10^2)$$

$$W = 750\,(J)$$

例題：



在光滑桌面上鑽一小洞，以細繩穿過。桌面上的繩端繫住一質量為 m 的物體，另一繩端懸掛 1 Kg 的砝碼。使 m 以 v 的速率做半徑 r 的等速率圓周運動，此時懸掛著的砝碼也恰能維持靜止。不考慮摩擦力，若緩緩施力將砝碼拉下一小段距離並保持砝碼不動，則下列敘述何者正確？(以小洞為參考點)

(A)物體的繞轉週期變小　(B)物體的加速度將變大
(C)物體的角動量將不變　(D)物體的線動量將不變
(E)物體的動能將變大

[解析]：　**(A)(B)(C)(E)**　　**(B)** $a=\dfrac{v^2}{r}$

例題：

水平光滑桌面上有一小球質量為 m，接一細繩通過一小孔下垂。起初 m 以切線速度 v 在半徑 R 之圓周上旋轉，用力把細繩拉下使之變為在半徑 $R/4$ 之圓周上旋轉，則做功若功？

[解析]：

因施力為一中心力，所以角動量不變。

$$Rv=\frac{R}{4}v' \quad\Rightarrow\quad v'=4v$$

由功能原理　$E_{k_1}+W=E_{k_2}$

$$W=E_{k_2}-E_{k_1}=\frac{1}{2}m(v'^2-v^2)=\frac{15}{2}mv^2$$

例題：

一質量為 m 的小星球，在離太陽無窮遠處的速率為 v，位能為零。假設小星球不受太陽引力的影響，而沿直線運動，則與太陽的質心最接近距離為 b。在太陽的引力作用下，小星球的軌道是一條以太陽為焦點的雙曲線。設太陽質量為 M，位置固定，小星球離太陽的質心最短距離為 d(d 大於太陽之半徑），重力常數為 G。則下列有關小星球的敘述何者正確？

(A)對太陽質心的角動量的大小為 mvb

(B)總力學能為 $\frac{1}{2}mv^2$ (C)在離太陽最近處之加速度大小為 $\frac{GM}{d^2}$

(D)對太陽的最大速率為 v

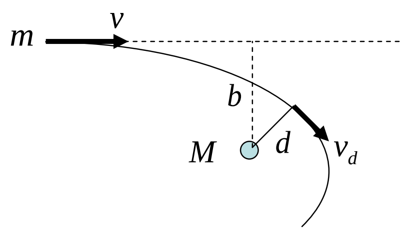
(E) $d=\sqrt{(\frac{GM}{v^2})^2+b^2}-\frac{GM}{v^2}$

［解析］： **(A)(B)(C)(E)**

(A)小星球受力指向太陽，為一向心力，與位置向量夾角 180^0

$$\sum \vec{M}_o = 0$$

因此，角動量守恆。 $H = bmv$



(C) $F=\frac{GMm}{d^2}=ma \quad \Rightarrow \quad a=\frac{GM}{d^2}$

(D)角動量守恆 $H = bmv = dmv_d \quad \Rightarrow \quad v_d = \frac{b}{d}v > v$

(E)由力學能守恆 $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_d^2 - \frac{GMm}{d}$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\frac{b}{d}v)^2 - \frac{GMm}{d} \qquad d=\sqrt{(\frac{GM}{v^2})^2+b^2}-\frac{GM}{v^2}$$

例題：

行星質量為 m 繞日運行時，在近日點之速率為 v、與日距離為 r。若此行星在近日點與在遠日點時，離太陽之距離比為 1:4，則行星在遠日點時對太陽之角動量大小為多少？

［解析］：

mrv

物體所受的合力矩為零：角動量守恆

當物體所受的合力矩為零時 $\sum \vec{M}_o = 0$，因 $\dot{\vec{H}}_o = \sum \vec{M}_o$

得 $\dot{\vec{H}}_o = 0$，即 $\vec{H}_o =$ 常數， $\vec{H}_o = I_1\vec{\omega}_1 = I_2\vec{\omega}_2$

如花式溜冰者及花式跳水者，因合力矩為零，角動量守恆。當物體轉動慣量減少(手臂收縮），則角速度變大；當轉動慣量增加(手臂伸開），則角速度變小。

直昇機利用主、副旋轉翼來保持機身的穩定：

整部直升機起飛時，力矩和為零。若主旋轉翼轉動時，依據角動量守恆定律，機體會反方向轉動，而使直升機不穩定。因此需在機尾設置小副旋轉翼提供力矩，以平衡主旋轉翼造成機體的角動量變化，來保持機身的穩定。

例題：

下列何者為角動量守恒的應用？

(A)花式溜冰的演員，當表演旋轉動作時，常由雙手或某一腳的平伸或收回來改變轉動的角速率

(B)馬戲團的空中飛人利用手腳及身體屈曲伸直以改變其轉動慣量，俾控制滾翻的轉動速率

(C)直升機利用主、副螺旋槳來保持機身穩定

(D)行星繞日公轉時行星與太陽之連線在相等時間內所過相同的面積

(E)火箭在太空飛行

［解析］：

(A)(B)(C)(D)

例題：

選出正確的敘述？

(A)角動量的量質與所選取的轉軸位置有關

(B)一鐵棒繞棒上某固定軸轉動時，除固定軸外，棒上各點的角速度相同

(C)同(B)，各點有相同的法線加速度

(D)質點繞固定軸轉動時，角動量的方向垂直於轉動平面

(E)花式滑冰的選手兩手伸平或縮回可改變角動量，進而改變角速度的大小

[解析]：

(A)(B)(D)

例題：

一質量為 M 半徑為 R 之均勻圓盤可繞其中心軸自由旋轉(轉動慣量為 $MR^2/2$)。圓盤開始時靜止，今在此圓盤上離軸心 $R/2$ 處，有一質量為 m 之小蟲沿著半徑為 $R/2$ 之圓周在圓盤上以等速度爬行。設每隔一分鐘小蟲可回到圓盤上的原出發點，則圓盤轉動的角速度為何？

[解析]： 設圓盤的角速度為 ω_1 ，小蟲的角速度為 ω_2

小蟲爬行與圓盤的力量對中心軸的合力矩為零，因此角動量守恆。

$$0=\frac{1}{2}MR^2\omega_1+m(\frac{R}{2})^2\omega_2 \quad \Rightarrow \quad \omega_2=-\frac{2M}{m}\omega_1$$ 圓盤與小蟲的運動方向相反

$$\omega_{2/1}=\omega_2-\omega_1=-\frac{2M+m}{m}\omega_1 \qquad \left|\omega_{2/1}\right|=\frac{2M+m}{m}\omega_1$$

$$\left|\omega_{2/1}\right|\underbrace{60}_{\text{一分等於 60 秒}}=2\pi \quad \Rightarrow \quad \omega_1=\frac{m\pi}{30(2M+m)}(rad/\sec)$$

例題：

一學生坐於可繞垂直軸自由轉動的凳上，兩手水平伸直並各持一 2 Kg 的重物，教師使其以 0.5 轉/ 秒 的角速率轉動。設摩擦可忽略不計，且對垂直軸不施力矩。又設該生將手收回時轉動慣量保持 $2.4\,Kg \cdot m^2$ ，且轉動慣量的改變僅由重物的收回。另重物至轉動軸的原距離為 1 m，而其末距離為 0.2 m，求該生的末角速率？

[解析]：

手伸縮屬於角動量守恆

$$0=(2.4+2\times2\times1^2)\times0.5+(2.4+2\times2\times0.2^2)\times\omega \quad\Rightarrow\quad \omega=1.25\,(rps)$$

例題：

A 和 B 兩飛輪裝在軸上，以有摩擦的離合器 C 把它們接連或分開。A 的轉動慣量是 $8\,Kg \cdot m^2$。離合器鬆開時，A 被轉動到角速度 600 rpm。B 最初是靜止的，把離合器接上後，B 加速而 A 減速，直到二者之角速度相同，末角速度為 400 rpm。求 B 之轉動慣量？

[解析]：

若以整體系統來看，摩擦力屬內力，角動量守恆。

$$I_A\omega_A+I_B\omega_B=(I_A+I_B)\omega$$

$$8\times600+I_B\times0=(8+I_B)400$$

$$I_B=4\,(Kg\cdot m^2)$$

剛體(或質點系統)的旋轉動能

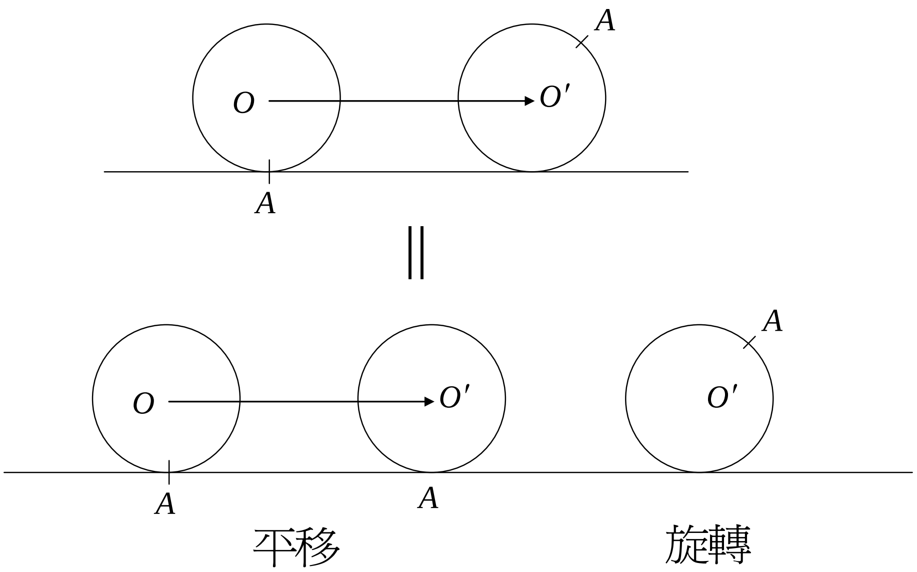
若系統對 O 點的轉動慣量為 I，系統的角速度為 ω，則系統對 O 點的動能為

$$K=\frac{1}{2}I\omega^2$$

[證明]：(以質點系統為例)

$$K=\frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2=\frac{1}{2}\sum_i m_i (r_i\omega)^2=\frac{1}{2}\sum_i (m_i r_i^2)\omega^2=\frac{1}{2}I\omega^2$$

任何物體移動為平移與旋轉的合成



剛體運動時總動能： $E_k=\underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{平移動能}}+\underbrace{\frac{1}{2}I\omega^2}_{\text{旋轉動能}}$

例題：

一質量為 m，半徑為 R 的實心小鋼球，從高 H 的斜板頂端，由靜止開始向下運動。如果斜板粗糙，鋼球是以純滾動的方式滾到底端，則其到達底端之速度為何？(已知鋼球對其質心的轉動慣量為 $\frac{2}{5}mR^2$)

[解析]：

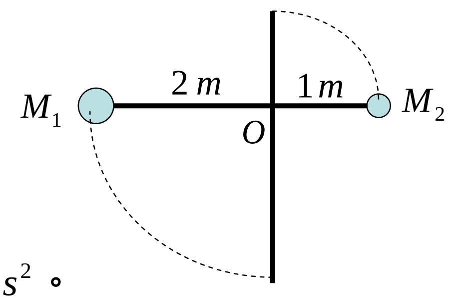
因鋼球是以純滾動(無滑動)方式滾到底端，因此靜摩擦力並未做功，且因球為滾動方式運動，球的質心速度 v 與球的角速度 ω 關係為 $v = R\omega$。由力學能守恆

$$\underbrace{0}_{\text{動能}} + \underbrace{mgH}_{\text{位能}} = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{平移動能}} + \underbrace{\frac{1}{2}I\omega^2}_{\text{旋轉動能}} + \underbrace{0}_{\text{位能}} \qquad v = \sqrt{\frac{10}{7}gH}$$

例題：

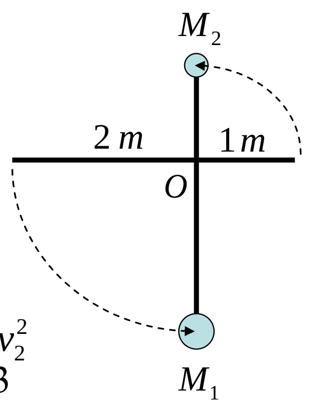
M_1 與 M_2 兩小球以無質量之輕棍連起如圖，可繞 O 自由旋轉。從水平位置釋放，求 M_1 之最大速度？

設 $M_1 = 4\,Kg$，$M_2 = 2\,Kg$，$g = 10\,m/s^2$。



[解析]：

ω 相同 $\quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{2\times\omega}{1\times\omega} = \frac{2}{1} \Rightarrow v_1 = 2v_2$



由力學能守恆，以 O 點為參考高度

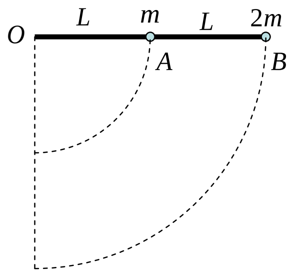
$$0 = \underbrace{4\times10\times(-2)}_{M_1\text{ 位能}} + \underbrace{\frac{1}{2}\times4\times v_1^2}_{M_1\text{ 動能}} + \underbrace{2\times10\times1}_{M_2\text{ 位能}} + \underbrace{\frac{1}{2}\times2\times v_2^2}_{M_2\text{ 動能}}$$

$$v_1 = \sqrt{80/3}\ (m/s)$$

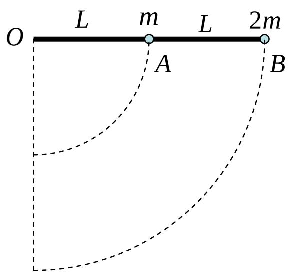
例題：

質量各為 m 和 2m 的 A、B 的兩質點，以輕棒連接，$OA = AB = L$。輕棒由水平位置靜止釋放，繞 O 點自由旋轉到鉛直位置瞬間。試求

(1)質點 A 的速率若干？　　(2)質點 B 的角動量若干？



[解析]：

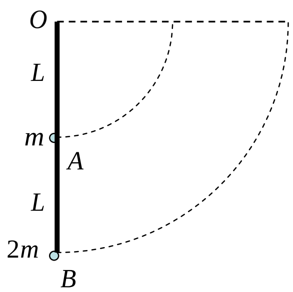


(1) ω 相同　$\frac{v_A}{v_B} = \frac{L\times\omega}{2L\times\omega} = \frac{1}{2} \Rightarrow v_B = 2v_A$

由力學能守恆，以 O 點為參考高度

$$0 = \underbrace{mg(-L)}_{A\text{位能}} + \underbrace{\frac{1}{2}mv_A^2}_{A\text{動能}} + \underbrace{2mg(-2L)}_{B\text{位能}} + \underbrace{\frac{1}{2}(2m)v_B^2}_{B\text{動能}}$$

$$v_A = \frac{1}{3}\sqrt{10gL}\ (m/s)$$



(2)

$$\vec{H}_0 = -2L\vec{j} \times 2m\left(-\frac{2}{3}\sqrt{10gL}\,\vec{i}\right) = -\frac{8}{3}mL\sqrt{10gL}\,\vec{k}$$

$$\left|\vec{H}_0\right| = \frac{8}{3}mL\sqrt{10gL}\ (Kg\cdot m^2/s)$$