第二章　高階常微分方程式

2.1　N 階線性齊次常微分方程式的解

n 階線性常微分方程式

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\Lambda\ +a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x)\qquad x\in(a,b)\qquad \text{-----①}$$

若 $a_n(x),a_{n-1}(x),\Lambda\ ,a_1(x),a_0(x)$ 在 $x\in(a,b)$ 上皆連續且 $a_n(x)\neq 0$，則稱①式的常微分方程式爲正規(normal)。當 $a_n(x),a_{n-1}(x),\Lambda\ ,a_1(x),a_0(x)$ 皆爲常數時，稱①式爲常係數常微分方程式，否則稱爲變係數常微分方程式。當 $f(x)=0$ 時，稱①式爲齊次(homogeneous)常微分方程式，否則稱爲非齊次(non-homogeneous)常微分方程式， $f(x)$ 稱爲強制函數(forcing function)。例如

$y'''+3y''+3y'+y=e^x$　　　　(三階常係數非齊次常微分方程式)

$x^2y''+4xy'+2y=0$　　　　(二階變係數齊次常微分方程式)

定理:

n 階線性常微分方程式

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\Lambda\ +a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x)\qquad x\in(a,b)$$

$$y(x_0)=y_0\text{，}y'(x_0)=y_1\text{，}y''(x_0)=y_2\text{，}\cdots\text{，}y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$$

且 y_0，y_1，y_2，⋯， y_{n-1} 爲常數，則上述 n 階線性常微分方程式具唯一解的充分條件爲

$a_n(x),a_{n-1}(x),\Lambda\ ,a_1(x),a_0(x),f(x)$ 在 $x\in(a,b)$ 上皆連續且 $a_n(x)\neq 0$

即 n 階線性常微分方程式須爲正規(normal)。

例題　(90 台大電機)

下列微分方程式 $y''+4y=8x^2$， $y(0)=0$ 在 $x\in(0,1)$ 內是否具唯一解？

[解法]:雖然 $a_2(x)=1,a_0(x)=4,f(x)=8x^2$ 在 $x\in(0,1)$ 內皆連續，但只給一個條件 $y(0)=0$，缺一個條件，故非唯一解。此解爲

$y=\cos 2x+c_1\sin 2x+2x^2-1$， c_1 爲任意常數

1. n 階線性齊次常微分方程式的齊次解

(A) n 階線性齊次常微分方程式

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\Lambda\ +a_1(x)y'+a_0(x)y=0\qquad x\in(a,b)\qquad \text{-----②}$$

爲正規，若 $y_1(x)$， $y_2(x)$，⋯， $y_n(x)$ 爲符合②式在 $x\in(a,b)$ 內的解，則

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\Lambda\ +c_ny_n(x)$$

爲②式在 $x \in (a,b)$ 內的齊次解，上述 $y_1(x)$，$y_2(x)$，⋯， $y_n(x)$ 在 $x \in (a,b)$ 內須線性獨立。

[証明]:因 $y_1(x)$ ， $y_2(x)$ ，⋯， $y_n(x)$ 爲符合②式在 $x \in (a,b)$ 內的解

$$a_n(x)y_1^{(n)} + a_{n-1}(x)y_1^{(n-1)} + \Lambda + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1 = 0 \qquad \text{---------③}$$

$$a_n(x)y_2^{(n)} + a_{n-1}(x)y_2^{(n-1)} + \Lambda + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2 = 0 \qquad \text{--------④}$$

M

$$a_n(x)y_n^{(n)} + a_{n-1}(x)y_n^{(n-1)} + \Lambda + a_1(x)y_n' + a_0(x)y_n = 0 \qquad \text{----------⑤}$$

$c_1 \times$③$+ c_2 \times$④$+\cdots+ c_n \times$⑤ 得

$$a_n(x)(c_1y_1 + c_2y_2 + \Lambda + c_ny_n)^n + a_{n-1}(x)(c_1y_1 + c_2y_2 + \Lambda + c_ny_n)^{n-1} + \Lambda$$
$$+ a_0(x)(c_1y_1 + c_2y_2 + \Lambda + c_ny_n) = 0$$

與②式比較

$\therefore$ $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \Lambda + c_ny_n(x)$ 爲②式在 $x \in (a,b)$ 內的齊次解

(B) 函數線性獨立判定方法

定義:

若有 n 個函數 $y_1(x)$，$y_2(x)$，⋯，$y_n(x)$ 及 n 個常數 c_1，c_2，⋯，c_n，在 $x \in (a,b)$ 內，唯有 $c_1 = c_2 = \Lambda = c_n = 0$ 才使得

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \Lambda + c_ny_n(x) = 0$$

則稱 $y_1(x)$，$y_2(x)$，⋯，$y_n(x)$ 在 $x \in (a,b)$ 內爲線性獨立。若 c_1，c_2，⋯，c_n 其中有一個不爲零，則稱 $y_1(x)$，$y_2(x)$，⋯，$y_n(x)$ 在 $x \in (a,b)$ 內爲線性相依。

定理:

函數 $y_1(x)$，$y_2(x)$，⋯，$y_n(x)$ 在 $x \in (a,b)$ 內的 Wronskian 行列式定義爲

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \Lambda & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \Lambda & y_n'(x) \\ M & M & O & M \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \Lambda & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

則 $y_1(x)$，$y_2(x)$，⋯，$y_n(x)$ 在 $x \in (a,b)$ 內爲線性獨立的充分條件爲 $W(x) \neq 0$。即當 $W(x) \neq 0$，則 $y_1(x)$，$y_2(x)$，⋯，$y_n(x)$ 在 $x \in (a,b)$ 內

爲線性獨立；但 $W(x)=0$，不能確定 $y_1(x)$，$y_2(x)$，$\cdots$，$y_n(x)$ 在 $x\in(a,b)$ 內是否線性相依。只能說，若 $y_1(x)$，$y_2(x)$，$\cdots$，$y_n(x)$ 爲線性相依時，則 $W(x)=0$。

[証明]: $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x)=0$ 其中 c_1，c_2，$\cdots$，c_n 爲常數

將上式微分 $(n-1)$ 次

$$c_1y_1'(x)+c_2y_2'(x)+\cdots+c_ny_n'(x)=0$$

$$c_1y_1''(x)+c_2y_2''(x)+\cdots+c_ny_n''(x)=0$$

$$\vdots$$

$$c_1y_1^{(n-1)}(x)+c_2y_2^{(n-1)}(x)+\cdots+c_ny_n^{(n-1)}(x)=0$$

以矩陣型式表示爲

$$\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

由 Cramer’s rule，且當

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}\neq 0$$

得 $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$，因此 $y_1(x)$，$y_2(x)$，$\cdots$，$y_n(x)$ 在 $x\in(a,b)$ 內爲線性獨立。

例題: (90 台科大化工)

下列函數是否爲線性獨立 e^x，e^{-3x}，xe^{-3x}

[解法]:

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^x & e^{-3x} & xe^{-3x} \\ e^x & -3e^{-3x} & (1-3x)e^{-3x} \\ e^x & 9e^{-3x} & (-6+9x)e^{-3x} \end{vmatrix}=e^{-5x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & -3 & 1-3x \\ 1 & 9 & -6+9x \end{vmatrix}$$

$$=e^{-5x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & -4 & 1-4x \\ 0 & 8 & -6+8x \end{vmatrix}=e^{-5x}\begin{vmatrix} -4 & 1-4x \\ 8 & -6+8x \end{vmatrix}$$

$$=e^{-5x}\begin{vmatrix} -4 & 1-4x \\ 0 & -4 \end{vmatrix}=16e^{-5x}\neq 0$$

$\therefore$ e^x，e^{-3x}，xe^{-3x} 爲線性獨立

例題: (90 中央環工)

請計算下列四個函數的 Wronskian 行列式

$$e^{-2x}\text{，}e^{-x}\text{，}e^{x}\text{，}e^{2x}$$

[解法]:

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{-x} & e^{x} & e^{2x} \\ -2e^{-2x} & -e^{-x} & e^{x} & 2e^{2x} \\ 4e^{-2x} & e^{-x} & e^{x} & 4e^{2x} \\ -8e^{-2x} & -e^{-x} & e^{x} & 8e^{2x} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 4 \\ -8 & -1 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 9 & 16 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -3 & -3 & 0 \\ 7 & 9 & 16 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & -12 & -12 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 6 & 12 \\ -12 & 12 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 0 & 12 \end{vmatrix}=72$$

例題： (90 成大土木)

$f(x)$及$g(x)$定義如下

$$\begin{cases} f(x)=x^2 & x\ge 0 \\ f(x)=0 & x<0 \end{cases} \qquad \begin{cases} g(x)=0 & x\ge 0 \\ g(x)=x^2 & x<0 \end{cases}$$

試問 $f(x)$與$g(x)$是否線性獨立？

[解法]：(i) $x<0$

當 $c_1 f(x)+c_2 g(x)=0$ 時須取$c_2=0$，c_1爲任意數

$\therefore$ $f(x)$與$g(x)$線性相依

(ii) $x\ge 0$

當 $c_3 f(x)+c_4 g(x)=0$ 時須取$c_3=0$，c_4爲任意數

$\therefore$ $f(x)$與$g(x)$線性相依

(iii) $\alpha<x<\beta$，其中 $\alpha<0$，$\beta>0$

當 $c_5 f(x)+c_6 g(x)=0$ 時須取 $c_5=c_6=0$，才能使 $\alpha<x<\beta$ 內之任意x成立

$\therefore$ $f(x)$與$g(x)$線性獨立

例題：　(91 雲科大電機)

There are two solutions that are solved for the equation $y'' + xy = 0$ in the power series

$$y_1(x) = 1 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{180}x^6 - \frac{1}{12960}x^9 + \cdots$$

$$y_2(x) = x - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{504}x^7 - \frac{1}{45360}x^{10} + \cdots$$

Can you verify the solutions are linearly independent？

[解法]：令 $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$

$$c_1\left(1 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{180}x^6 - \frac{1}{12960}x^9 + \cdots\right) + c_2\left(x - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{504}x^7 - \frac{1}{45360}x^{10} + \cdots\right) = 0$$

唯有當 $c_1 = c_2 = 0$ 時上式才成立，因此 $y_1(x)$ 及 $y_2(x)$ 爲線性獨立

(C) Abel's Identity

n 階線性齊次常微分方程式

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \qquad x \in (a,b)$$

爲正規，且 $y_1(x)$ ， $y_2(x)$ ，⋯， $y_n(x)$ 爲上式在 $x \in (a,b)$ 內的齊次解，$x_0 \in (a,b)$ ，則 $y_1(x)$ ， $y_2(x)$ ，⋯， $y_n(x)$ 在 $x \in (a,b)$ 內的 Wronskian 行列式爲

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}dt} \qquad x \in (a,b) \qquad \text{-------⑥}$$

[証明]:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

$$\frac{dW(x)}{dx} = \begin{vmatrix} y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & \cdots & y_n''(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}+\cdots$$

$$+\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\dfrac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}y_1^{(n-1)}(x) & -\dfrac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & -\dfrac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

$$=-\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}=-\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}W(x)$$

$$\frac{dW(x)}{W(x)}=-\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}dx$$

$$W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}dt} \qquad x\in(a,b)$$

⑥式中因$e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}dt}$在$x\in(a,b)$內不爲零，因此，當$W(x_0)=0$，則 $W(x)=0$，不能判定 $y_1(x)$，$y_2(x)$，…，$y_n(x)$ 在$x\in(a,b)$內是否線性相依。但當$W(x_0)\neq 0$，則 $W(x)\neq 0$，$y_1(x)$，$y_2(x)$，…，$y_n(x)$ 在$x\in(a,b)$內必爲線性獨立。

若爲二階線性齊次常微分方程式的情況

$$a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0 \qquad x\in(a,b)$$

爲正規，且$y_1(x)$，$y_2(x)$爲上式在$x\in(a,b)$內的齊次解，$x_0\in(a,b)$，則 $y_1(x)$，$y_2(x)$在$x\in(a,b)$ 內的 Wronskian 行列式爲

$$W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{a_1(t)}{a_2(t)}dt} \qquad x\in(a,b)$$

[証明]:$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$

$$\frac{dW(x)}{dx}=\begin{vmatrix} y_1'(x) & y_2'(x) \\ y_2'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) \end{vmatrix}$$

$$=0+\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ -\frac{a_1(x)}{a_2(x)}y_1'(x)-\frac{a_0(x)}{a_2(x)}y_1 & -\frac{a_1(x)}{a_2(x)}y_2'(x)-\frac{a_0(x)}{a_2(x)}y_2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ -\frac{a_1(x)}{a_2(x)}y_1'(x) & -\frac{a_1(x)}{a_2(x)}y_2'(x) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ -\frac{a_0(x)}{a_2(x)}y_1 & -\frac{a_0(x)}{a_2(x)}y_2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ -\frac{a_1(x)}{a_2(x)}y_1'(x) & -\frac{a_1(x)}{a_2(x)}y_2'(x) \end{vmatrix}+0$$

$$=-\frac{a_1(x)}{a_2(x)}\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}=-\frac{a_1(x)}{a_2(x)}W(x)$$

$$\frac{dW(x)}{W(x)}=-\frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx$$

$$W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{a_1(t)}{a_2(t)}dt} \qquad x\in(a,b)$$

[註]: $\dot{X}=AX$ 中

$$X=[X_1\ X_2 \cdots X_n]=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

X_1，X_2，⋯，X_n 的 Wronskian 行列式定義爲

$$W=\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

則

$$W(x)=W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x}tr(A)dt} \qquad tr(A)=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$$

例題: (89 交大光電)

若 $y_1(x)$ 爲 $y''+6x^3y'+9x^4y=0$ 的解，且 $y_1(0)=1$，$y_1'(0)=0$。

另 $y_2(x)$ 爲 $y''+6x^3y'+9x^4y=0$ 的解，且 $y_2(0)=0$ ， $y_2'(0)=1$ ，
則 $y_1(x)$ 與 $y_2(x)$ 是否線性獨立?

[解法]:由 Abel's identity

$$W(x)=W(0)e^{-\int_0^x 6t^3dt}=W(0)e^{-\frac{3}{2}x^4}$$

又 $W(0)=\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1$

$\therefore\ W(x)=e^{-\frac{3}{2}x^4}\neq 0$

即 $y_1(x)$ 與 $y_2(x)$ 互爲線性獨立

例題: (88 台科大電機)

若 $y_1(x)$ 及 $y_2(x)$ 爲 $x^2y''+2xy'+(x-2)y=0$ 的線性獨立解，
$y_1(1)=0$ ， $y_1'(1)=1$ ， $y_2(1)=2$ ， $y_2'(1)=3$ ，試求 $W(x)$?

[解法]:由 Abel's identity

$$W(x)=W(1)e^{-\int_1^x \frac{2t}{t^2}dt}=\frac{W(1)}{x^2}$$

又 $W(1)=\begin{vmatrix} y_1(1) & y_2(1) \\ y_1'(1) & y_2'(1) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-2$

$\therefore\ W(x)=\dfrac{-2}{x^2}$

例題 :(交大控制)

若 $y_1(x)$ 及 $y_2(x)$ 爲 $y''-(2\cos 2x)y'+2e^{-x}y=0$ 的二解，且滿足

$y_1(0)+y_2(0)=0$

$y_1(0)+y_2(0)+y_1'(0)=0$

$y_2(0)+y_1'(0)+y_2'(0)=0$

$y_1'(0)+y_2'(0)=1$

則 $y_1(x)$ 與 $y_2(x)$ 是否爲線性獨立?

[解法] : $W(x)=W(0)e^{-\int(-2\cos 2x)dx}=W(0)e^{\sin 2x}$

由題目條件四聯立方程式可解得

$y_1(0)=1, y_2(0)=-1, y_1'(0)=0, y_2'(0)=1$

$W(0)=\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1$

$\therefore W(x) = e^{\sin 2x} \neq 0$

即 $y_1(x)$ 與 $y_2(x)$ 互爲線性獨立

2. n 階線性非齊次常微分方程式

定理: n 階線性非齊次常微分方程式

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \Lambda + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad x \in (a,b) \quad \text{-----①}$$

爲正規(normal)， $y_1(x), y_2(x), \Lambda, y_n(x)$ 爲 n 個線性獨立齊次解， $y_h(x)$ 爲線性組合之齊次解，且 $y_p(x)$ 爲適合①式的特解(particular solution)，則

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \Lambda + c_ny_n(x) + y_p(x)$$

爲①式的通解(general solution)。

[証明]: $\because$ $y_1(x), y_2(x), \Lambda, y_n(x)$ 爲①式的 n 個線性獨立齊次解

$$a_n(x)y_1^{(n)} + a_{n-1}(x)y_1^{(n-1)} + \Lambda + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1 = 0 \quad \text{--------③}$$

$$a_n(x)y_2^{(n)} + a_{n-1}(x)y_2^{(n-1)} + \Lambda + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2 = 0 \quad \text{-------④}$$

$$\mathrm{M}$$

$$a_n(x)y_n^{(n)} + a_{n-1}(x)y_n^{(n-1)} + \Lambda + a_1(x)y_n' + a_0(x)y_n = 0 \quad \text{-------⑤}$$

$\because$ 且 $y_p(x)$ 爲適合①式的特解

$$a_n(x)y_p^{(n)} + a_{n-1}(x)y_p^{(n-1)} + \Lambda + a_1(x)y_p' + a_0(x)y_p = f(x) \quad \text{--------⑦}$$

$c_1 \times$③$+ c_2 \times$④$+\cdots+ c_n \times$⑤+⑦

$$\begin{aligned}
&a_n(x)[c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \Lambda + c_ny_n(x) + y_p(x)]^{(n)} \\
&+ a_{n-1}(x)[c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \Lambda + c_ny_n(x) + y_p(x)]^{(n-1)} + \Lambda \\
&+ a_1(x)[c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \Lambda + c_ny_n(x) + y_p(x)]' \\
&+ a_0(x)[c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \Lambda + c_ny_n(x) + y_p(x)] = f(x)
\end{aligned}$$

與①式比較

$\therefore$ $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \Lambda + c_ny_n(x) + y_p(x) = y_h(x) + y_p(x)$

爲①式的通解

例題:　　(91 交大電控)

若函數 $x_1(t)$ 及 $x_2(t)$ 爲 $\sin t\dfrac{d^2x}{dt^2}+\cos t\dfrac{dx}{dt}+t=5$ 的二個不同解，則 $3x_1(t)+7x_2(t)$ 是否爲其解？

[解法]:$\because$ $x_1(t)$ 及 $x_2(t)$ 爲 $\sin t\dfrac{d^2x}{dt^2}+\cos t\dfrac{dx}{dt}+t=5$ 的二個不同解

$$\sin t\frac{d^2x_1}{dt^2}+\cos t\frac{dx_1}{dt}+t=5 \qquad \text{----------(a)}$$

$$\sin t\frac{d^2x_2}{dt^2}+\cos t\frac{dx_2}{dt}+t=5 \qquad \text{-----------(b)}$$

$3\times(a)+7\times(b)$

$$\sin t\frac{d^2(3x_1+7x_2)}{dt^2}+\cos t\frac{d(3x_1+7x_2)}{dt}+t=50$$

不爲原 O.D.E.的型式，因此 $3x_1(t)+7x_2(t)$ 不爲其解

例題:　(90 交大光電)

若 $y_1(x)$ 及 $y_2(x)$ 爲 $y''+3\sqrt{2}y'+5xy=f(x)$ 的線性獨立解，且 $f(x)\neq 0$ ，

則 $2\sqrt{2}y_1(x)+3y_2(x)$ 是否亦爲上述 O.D.E.的解?

[解法]$\because$ $y_1(x)$ 及 $y_2(x)$ 分別爲 O.D.E.的解

$$y_1''+3\sqrt{2}y_1'+5xy_1=f(x) \qquad \text{------------------(a)}$$

$$y_2''+3\sqrt{2}y_2'+5xy_2=f(x) \qquad \text{-------------------(b)}$$

$2\sqrt{2}\times(a)+3\times(b)$ 得

$$(2\sqrt{2}y_1+3y_2)''+3\sqrt{2}(2\sqrt{2}y_1+3y_2)'+5x(2\sqrt{2}y_1+3y_2)=(2\sqrt{2}+3)f(x)$$

不爲原 O.D.E.的型式,因此 $2\sqrt{2}y_1+3y_2$ 不爲其解。

例題：　(交大電機)

若 $f_1(x), f_2(x),\cdots\cdots, f_n(x)$ 爲下列 O.D.E.的 n 個相異解

$$y''+y'+y=g(x) \qquad g(x)\neq 0$$

試問 $a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n$ 等係數關係爲何才使得

$$a_1f_1(x)+a_2f_2(x)+\cdots\cdots+a_nf_n(x)$$

亦爲 O.D.E 的解？

[解法]：∵ $f_1(x), f_2(x),\cdots, f_n(x)$ 爲 O.D.E.的解

$f_1''+f_1'+f_1=g(x)$ --(a)

$f_2''+f_2'+f_2=g(x)$ --(b)

$\vdots$

$f_n''+f_n'+f_n=g(x)$ --(c)

$a_1\times(a)+a_2\times(b)+\cdots+a_n\times(c)$ 得

$$[a_1f_1+a_2f_2+\cdots+a_nf_n]''+[a_1f_1+a_2f_2+\cdots+a_nf_n]'+$$
$$[a_1f_1+a_2f_2+\cdots+a_nf_n]=(a_1+a_2+\cdots+a_n)g(x)$$

欲使上式中 $a_1f_1+a_2f_2+\cdots+a_nf_n$ 爲原 O.D.E.的解，須取

$a_1+a_2+\cdots+a_n=1$，

則等號右側才與原 O.D.E.相同

3.降階法(可求齊次解及特解)

包含二階以上的常微分方程式，若我們已知道一個齊次解，則我們可利用降階法(Reduction of Order)來求得其他齊次解及特解，可適用常係數及變係數的 O.D.E.。以二階常微分方程式爲例

$$a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x) \qquad x\in(a,b) \qquad \text{-------------⑧}$$

爲正規，即 $a_2(x),a_1(x),a_0(x)$ 在 $x\in(a,b)$ 上皆連續且 $a_2(x)\neq 0$。若能觀察出⑧式的齊次解 $u(x)$，即 $a_2(x)u''+a_1(x)u'+a_0(x)u=0$，可令通解爲

$$y(x)=u(x)v(x)$$
$$y'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$
$$y''(x)=u''(x)v(x)+2u'(x)v'(x)+u(x)v''(x)$$

將 $y_p(x)$，$y_p'(x)$，$y_p''(x)$ 帶回原 O.D.E.

$$a_2(u''v+2u'v'+uv'')+a_1(u'v+uv')+a_0uv=f(x)$$
$$a_2uv''+(2a_2u'+a_1u)v'+(a_2u''+a_1u'+a_0u)v=f(x)$$

∵ $u(x)$ 爲齊次解， $a_2(x)u''+a_1(x)u'+a_0(x)u=0$，上式得

$$a_2uv''+(2a_2u'+a_1u)v'=f(x)$$

令 $z(x)=v'(x)$，上式改爲

$$a_2u\frac{dz}{dx}+(2a_2u'+a_1u)z=f(x)$$

爲一階 O.D.E.，因此我們已經把一個二階 O.D.E.改爲一階 O.D.E.，故稱爲降階法，此時我們再以一階線性 O.D.E.的方法處理即可得 $z(x)$。因 $z(x)=v'(x)$，再積分可得 $v(x)$，最後 $y(x)=u(x)v(x)$ 即可得通解。

例題: (92 台科大電機)

若 $y_1 = e^{-3x}$ 為微分方程式 $y'' + 6y' + 9y = 0$ 的一解

(a)試由 y_1 求出另一線性獨立解 y_2 。

(b)請說明為何 y_1 與 y_2 為線性獨立？

(c)請問解空間的維數為何？

[解法]：(a)$\because$ $y_1 = e^{-3x}$ 為 $y'' + 6y' + 9y = 0$ 的齊次解，由降階法

令 $y = e^{-3x}v(x)$ $y' = -3e^{-3x}v + e^{-3x}v'$ $y'' = 9e^{-3x}v - 6e^{-3x}v' + e^{-3x}v''$

原 O.D.E.得 $e^{-3x}v'' = 0$

$$v'' = 0 \quad \Rightarrow \quad v' = c_1 \quad \Rightarrow \quad v = c_1x + c_2$$

$\therefore y = e^{-3x}v(x) = e^{-3x}(c_1x + c_2) = c_1xe^{-3x} + c_2e^{-3x}$

所得另一解 $y_2 = xe^{-3x}$

(b) $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-3x} & xe^{-3x} \\ -3e^{-3x} & e^{-3x} - 3xe^{-3x} \end{vmatrix} = e^{-6x} \neq 0$

$\therefore$ y_1 與 y_2 為線性獨立

(c)$\because$ y_1 與 y_2 為線性獨立 $\Rightarrow$ 解空間的維數為二維

例題: (92 台大應力)

若下列 O.D.E. $ty'' - (2t+1)y' + 2y = 0$ $(t > 0)$ 有一解的型式為 e^{ct}，c 為某適當常數。試求出 O.D.E.的通解？

[解法]：$\because$ e^{ct} 為 $ty'' - (2t+1)y' + 2y = 0$ 的一解，將 e^{ct} 帶回 O.D.E.

$$c^2te^{ct} - c(2t+1)e^{ct} + 2e^{ct} = 0$$

$$(c^2 - 2c)t + (2 - c) = 0$$

$\because$ 1及 t 為線性獨立 $\Rightarrow$ $c^2 - 2c = 0$ 且 $2 - c = 0$ $\therefore$ $c = 2$

$\because$ e^{2t} 為 O.D.E.的一個齊次解，由降階法

令 $y = e^{2t}v(x)$ $y' = 2e^{2t}v + e^{2t}v'$ $y'' = 4e^{2t}v + 4e^{2t}v' + e^{2t}v''$

原 O.D.E.得 $te^{2t}v'' + (2t-1)e^{2t}v' = 0$

$$v'' + \frac{2t-1}{t}v' = 0$$

$$I(t) = e^{\int \frac{2t-1}{t}dt} = e^{\int (2-\frac{1}{t})dt} = \frac{e^{2t}}{t}$$

$$v'(t) = c_1te^{-2t}$$

$$v(t) = c_1(-\frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t}) + c_2 = c_3(2te^{-2t} + e^{-2t}) + c_2$$

$$\therefore \quad y = e^{2t}v(x) = e^{2t}[c_3(2te^{-2t} + e^{-2t}) + c_2] = c_3(2t+1) + c_2e^{2t}$$

例題:　(90 成大電機)

$y_1(x)=x$ 爲 $(2x^2+3x+1)y''+2xy'-2y=0$ 在 $x\neq -1$，$x\neq -\dfrac{1}{2}$ 的解

試求 $y(x)$？

[解法]:令 $y=xv(x)$　$y'=v+xv'$　$y''=2v'+xv''$　帶回原 O.D.E.

$$(2x^2+3x+1)xv''+(6x^2+6x+2)v'=0$$

$$v''+\frac{6x^2+6x+2}{x(2x+1)(x+1)}v'=0$$

$$I(x)=e^{\int\frac{6x^2+6x+2}{x(2x+1)(x+1)}dx}=e^{\int(\frac{2}{x}-\frac{2}{2x+1}+\frac{2}{x+1})dx}=\frac{x^2(x+1)^2}{2x+1}$$

$$v'(x)=c_3\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}=c_3[\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}]$$

$$v(x)=c_3(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1})+c_2=c_3\frac{-1}{x(x+1)}+c_2=c_1\frac{1}{x(x+1)}+c_2$$

$$y=xv(x)=c_1\frac{1}{x+1}+c_2x$$

例題:　(91 雲科大機械)

若 $y_1(x)$ 爲 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的一解，令 $y_2(x)=y_1(x)\int\dfrac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)}dx$

(i) $y_2(x)$ 是否爲 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的一解？

(ii)若 $y_1(x)\neq 0$，試問 $y_1(x)$、$y_2(x)$ 是否爲線性獨立？

[解法]:

(i)令 $y=y_1(x)v(x)$　$y'=y_1'v+y_1v'$　$y''=y_1''+2y_1'v'+y_1v''$　帶回原 O.D.E

$$y_1v''+(2y_1'+py_1)v'+(y_1''+py_1'+qy_1)v=0$$

因 $y_1(x)$ 爲 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的一解 $\Rightarrow$ $y_1''+py_1'+qy_1=0$ 上式得

$$y_1v''+(2y_1'+py_1)v'=0$$

$$v''+(\frac{2y_1'}{y_1}+p)v'=0$$

$$v'(x)=c_2e^{-\int[\frac{2y_1'(x)}{y_1(x)}+p(x)]dx}=c_2e^{-2\ln|y_1(x)|-\int p(x)dx}=c_2\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)}$$

$$v(x)=c_2\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)}dx+c_1$$

$$y=y_1(x)v(x)=c_2y_1(x)\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)}dx+c_1y_1(x)=c_2y_2(x)+c_1y_1(x)$$

$\therefore\ y_2(x)=y_1(x)\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)}dx$ 為一解

(ii)為線性獨立

例題: (91 成大土木)

$y_1(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ 為 $x^2y''+xy'+(x^2-\frac{1}{4})y=x^{\frac{3}{2}}$ 之一齊次解，試求該 O.D.E.的特解？

[解法]:令 $y=u(x)v(x)$ $u(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

$$y'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$
$$y''(x)=u''(x)v(x)+2u'(x)v'(x)+u(x)v''(x)$$

將 $y_p(x)$ ， $y_p'(x)$ ， $y_p''(x)$ 帶回原 O.D.E.

$$\mathrm{x}^2(u''v+2u'v'+uv'')+x(u'v+uv')+(x^2-\frac{1}{4})uv=x^{\frac{3}{2}}$$

$$x^2uv''+(2x^2u'+xu)v'+[x^2u''+xu'+(x^2-\frac{1}{4})u]v=x^{\frac{3}{2}} \qquad \text{---------(a)}$$

$\because\ u(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ 為齊次解， $x^2u''+xu'+(x^2-\frac{1}{4})u=0$

且 $2x^2u'+xu=\frac{2x^2\cos x}{\sqrt{x}}$ (a)式得

$$x^2\frac{\sin x}{\sqrt{x}}v''+\frac{2x^2\cos x}{\sqrt{x}}v'=x^{\frac{3}{2}}$$

$$v''+\frac{2\cos x}{\sin x}v'=\frac{1}{\sin x}$$

$$I(x)=e^{\int\frac{2\cos x}{\sin x}dx}=e^{2\ln|\sin x|}=\sin^2 x$$

$$v'(x)=[c_3+\int\sin^2 x\cdot\frac{1}{\sin x}dx]\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{c_3}{\sin^2 x}-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$v(x)=-c_3\cos x+\frac{1}{\sin x}+c_2=c_1\cos x+\frac{1}{\sin x}+c_2$$

$$y = u(x)v(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}(c_1 \cot x + \frac{1}{\sin x} + c_2) = c_1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + c_2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = y_h(x) + y_p(x)$$

$$y_h(x) = c_1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + c_2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

$$y_p(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

一般齊次解 $u(x)$ 較易觀察的型式爲

(A) $u(x) = px + q$ (p, q 爲常數)

帶回 $a_2(x)u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = 0$ 中

得 $a_1(x)p + a_0(x)(px + q) = 0$ 可求出 p, q

特殊情況:當 $a_1(x) + a_0(x)x = 0$ 時(即 $p = 1, q = 0$)，表齊次解 $u(x) = x$

(B) $u(x) = e^{mx}$

帶回 $a_2(x)u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = 0$ 中

得 $[m^2 a_2(x) + m a_1(x) + a_0(x)]e^{mx} = 0$

$$m^2 a_2(x) + m a_1(x) + a_0(x) = 0 \quad \text{可求出 } m$$

特殊情況:當 $a_2(x) + a_1(x) + a_0(x) = 0$ 時(即 $m = 1$)，表齊次解 $u(x) = e^x$

當 $a_2(x) - a_1(x) + a_0(x) = 0$ 時(即 $m = -1$)，表齊次解 $u(x) = e^{--x}$

例題: (92 清大微機電)

試求下列微分方程式 $xy'' + 2(x-1)y' + (x-2)y = 0$

[解法]： $a_2(x) = x$ $a_1(x) = 2x - 2$ $a_0(x) = x - 2$

$\because$ $a_2(x) - a_1(x) + a_0(x) = 0 \Rightarrow$ 有齊次解 $u(x) = e^{-x}$

令 $y = e^{-x}v$ $y' = -e^{-x}v + e^{-x}v'$ $y'' = e^{-x} - 2e^{-x}v' + e^{-x}v''$ 帶回 O.D.E.

$$xe^{-x}v'' - 2e^{-x}v' = 0$$

$$v'' - \frac{2}{x}v' = 0 \qquad I(x) = e^{-\int \frac{2}{x}dx} = \frac{1}{x^2}$$

$$v' = c_1 x^2 \quad \Rightarrow \quad v = c_2 x^3 + c_3$$

$$\therefore \; y = e^{-x}v = e^{-x}(c_2 x^3 + c_3)$$

例題: (91 成大土木)

試求下列常微分方程式 $(x+1)y''-(x+2)y'+y=e^x(x+1)^2$

[解法]： $a_2(x)=x+1$ $a_1(x)=-(x+2)$ $a_0(x)=1$

因 $a_2(x)+a_1(x)+a_0(x)=0$ 時，表齊次解 $u(x)=e^x$

令 $y(x)=e^x v(x)$ $y'(x)=e^x v(x)+e^x v'(x)$

$y''(x)=e^x v(x)+2e^x v'(x)+e^x v''$

將 $y_p(x)$ ，$y'_p(x)$ ，$y''_p(x)$ 帶回原 O.D.E.得

$$(x+1)v''+xv'=(x+1)^2$$

$$v''+\frac{x}{x+1}v'=x+1$$

$$I(x)=e^{\int\frac{x}{x+1}dx}=e^{\int(1-\frac{1}{x+1})dx}=e^{x-\ln|x+1|}=\frac{e^x}{x+1}$$

$$v'(x)=[c_3+\int\frac{e^x}{x+1}\cdot(x+1)dx]e^{-x}(x+1)=c_3e^{-x}(x+1)+(x+1)$$

$$v(x)=c_3(-xe^{-x}-2e^{-x})+\frac{x^2}{2}+x+c_2$$

$$v(x)=c_1(x+2)e^{-x}+\frac{x^2}{2}+x+c_2$$

$$y(x)=e^x v(x)=c_1(x+2)+c_2e^x+(\frac{x^2}{2}+x)e^x$$

[解法]： $a_2(x)=x+1$ $a_1(x)=-(x+2)$ $a_0(x)=1$

$\because$ $a_1(x)+a_0(x)(x+2)=0$ $\Rightarrow$ 有齊次解 $u(x)=x+2$

令 $y(x)=(x+2)v(x)$ $y'=v+(x+2)v'$ $y''=2v'+(x+2)v''$

帶回原 O.D.E.得 $(x+1)(x+2)v''-(x^2+2x+2)v'=e^x(x+1)^2$

$$v''-\frac{x^2+2x+2}{(x+1)(x+2)}v'=\frac{e^x(x+1)}{x+2}$$

$$v''-\left(1+\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x+2}\right)v'=\frac{e^x(x+1)}{x+2}$$

$$I(x)=e^{\int-\left(1+\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x+2}\right)dx}=e^{-x-\ln|x+1|+2\ln|x+2|}=\frac{e^{-x}(x+2)^2}{(x+1)}$$

$$v'=\left[c_2+\int\frac{e^{-x}(x+2)^2}{(x+1)}\cdot\frac{e^x(x+1)}{x+2}dx\right]\frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}$$

$$v'=\left[c_2+\frac{1}{2}(x+2)^2\right]\frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}$$

$$v=\int[c_2+\frac{1}{2}(x+2)^2]\frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}dx=c_2\int\frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}dx+\frac{1}{2}\int e^x(x+1)dx+c_1$$

$$v=c_2\int[\frac{e^x}{x+2}-\frac{e^x}{(x+2)^2}]dx+\frac{1}{2}\int e^x(x+1)dx+c_1$$

$$v=c_2\int d(\frac{e^x}{x+2})dx+\frac{1}{2}\int e^x(x+1)dx+c_1$$

$$v=c_2\frac{e^x}{x+2}+\frac{1}{2}xe^x+c_1$$

$$y(x)=(x+2)v(x)=(x+2)(c_2\frac{e^x}{x+2}+\frac{1}{2}xe^x+c_1)=c_1(x+1)+c_2e^x+(\frac{x^2}{2}+x)e^x$$

例題： (89 逢甲紡織)

試求下列常微分方程式 $x(1-x)y''+\frac{1}{2}(x+1)y'-\frac{1}{2}y=0$

[解法]:令 $u(x)=px+q$ 帶回原 O.D.E.

$$\frac{1}{2}(x+1)p-\frac{1}{2}(px+q)=0 \quad\Rightarrow\quad p=q$$

只要取 $p=q$ 則 $u(x)=px+q$ 爲齊次解，任意取 $p=q=1$

$\therefore$ $u(x)=x+1$ 爲齊次解

令 $y(x)=(x+1)v(x)$

$y'(x)=v(x)+(x+1)v'(x)$ $\qquad y''(x)=2v'+(x+1)v''$

將 $y_p(x)$ ， $y_p'(x)$ ， $y_p''(x)$ 帶回原 O.D.E.

$$x(1-x)(x+1)v''+[2x(1-x)+\frac{1}{2}(x+1)^2]v'=0$$

$$v''+\frac{\frac{3}{2}x^2-3x-\frac{1}{2}}{x(1-x)(x+1)}v'=0$$

$$I(x)=e^{\int\frac{\frac{3}{2}x^2-3x-\frac{1}{2}}{x(1-x)(x+1)}dx}=e^{\int(\frac{\frac{1}{2}}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1})dx}=\frac{x^{\frac{1}{2}}(x+1)^2}{x-1}$$

$$v'(x)=c_1\frac{x-1}{x^{\frac{1}{2}}(x+1)^2}$$

$$v(x)=c_1\int\frac{x-1}{x^{\frac{1}{2}}(x+1)^2}dx+c_2$$

$$y(x)=(x+1)v(x)=c_1(x+1)\int\frac{x-1}{x^{\frac{1}{2}}(x+1)^2}dx+c_2(x+1)$$

4.常係數齊次常微分方程式

若 a_n ，a_{n-1} ，⋯，a_1 ，a_0 爲常數，稱

$$a_n y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\Lambda+a_1 y'+a_0 y=0 \qquad \text{-------------⑨}$$

爲常係數齊次常微分方程式。因 $a_n,a_{n-1},\Lambda,a_1,a_0$ 爲常數，在任何範圍內皆連續，⑨式爲 $x\in(-\infty,\infty)$ 內之正規 O.D.E.。

定義:

$$\frac{dy}{dx}=Dy \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=D^2y \qquad \cdots \qquad \frac{d^ny}{dx^n}=D^ny$$

上式中 $\frac{d}{dx}=D \qquad \frac{d^2}{dx^2}=D^2 \qquad \cdots \qquad \frac{d^n}{dx^n}=D^n$

稱爲微分運算子(Differential Operator)

由上述定義，⑨式可修正爲

$$(a_nD^n+a_{n-1}D^{n-1}+\Lambda+a_1D+a_0)y=0$$

$y=0$ 稱爲平常解(trivial solution)，我們當然希望得到不平常解(non-trivial solution)，因此

$$a_nD^n+a_{n-1}D^{n-1}+\Lambda+a_1D+a_0=0$$

上式稱爲⑨式的特徵方程式(Characteristic Equation)。當 $n\ge 2$ 時，根有相異根及重根之分，我們以二階爲例來做探討

(A1)特徵方程式的根爲實根型式的相異根

例題: (91 成大水利)

試求下列初值問題

$$y''+y'-6y=0 \qquad y(0)=10 \qquad y'(0)=0$$

[解法]: 特徵方程式: $D^2+D-6=0$

$$(D+3)(D-2)=0 \qquad D=-3，D=2$$

$$y=c_1e^{-3x}+c_2e^{2x}$$

$$\because \begin{cases} y(0)=10 \\ y'(0)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1+c_2=10 \\ -3c_1+2c_2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1=4 \\ c_2=6 \end{cases}$$

$$y=4e^{-3x}+6e^{2x}$$

[說明]: $y''+y'-6y=0$

$(D+3)(D-2)y=0$ ----------------------------------(a)

令 $(D-2)y=z$ ----------------------------------(b)

(a)式得 $(D+3)z=0$

$\frac{dz}{dx}+3z=0 \qquad z=c_3e^{-3x}$ 帶回(b)式

$\frac{dy}{dx}-2y=c_3e^{-3x}$

$$y=(c_2+\int e^{-2x}\cdot c_3e^{-3x}dx)e^{2x}=c_2e^{2x}-\frac{c_3}{5}e^{-3x}=c_1e^{-3x}+c_2e^{2x}$$

[註]:由上可知，若特徵方程式具相異實根 $D=D_1,D_2$ ，其相對齊次解爲

$y=c_1e^{D_1x}+c_2e^{D_2x}$

[推論]:由上可知，若特徵方程式具相異實根 $D=D_1,D_2,D_3$ ，其相對齊次解爲

$y=c_1e^{D_1x}+c_2e^{D_2x}+c_3e^{D_3x}$

例題: (91 中興環工)

試求下列常微分方程式 $y^{(4)}-8y''+15y=0$

[解法]: 特徵方程式: $D^4-8D^2+15=0$

$$(D^2-3)(D^2-5)=0 \qquad D=\pm\sqrt{3}\text{ ， }D=\pm\sqrt{5}$$

$$y=c_1e^{\sqrt{3}x}+c_2e^{-\sqrt{3}x}+c_3e^{\sqrt{5}x}+c_4e^{-\sqrt{5}x}$$

(A2))特徵方程式的根爲共軛複根型式的相異根

例題: (88 中山環工)

試求下列常微分方程式

$y''-y'+10y=0$

[解法]: 特徵方程式: $D^2-D+10=0 \qquad D=\frac{1\pm\sqrt{1-40}}{2}=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{39}}{2}$

$$y=Ae^{(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{39}}{2})x}+Be^{(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{39}}{2})x}=e^{\frac{1}{2}x}(Ae^{i\frac{\sqrt{39}}{2}x}+Be^{-i\frac{\sqrt{39}}{2}x})$$

$$=e^{\frac{1}{2}x}[A(\cos\frac{\sqrt{39}}{2}x+i\sin\frac{\sqrt{39}}{2}x)+B(\cos\frac{\sqrt{39}}{2}x-i\sin\frac{\sqrt{39}}{2}x)]$$

$$=e^{\frac{1}{2}x}[(A+B)\cos\frac{\sqrt{39}}{2}x+(iA-iB)\sin\frac{\sqrt{39}}{2}x)]$$

$$=e^{\frac{1}{2}x}(c_1\cos\frac{\sqrt{39}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{39}}{2}x)$$

[註]:由上可知，若特徵方程式具相異共軛複根$D=\alpha\pm i\beta$，其相對齊次解爲

$$y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$$

[推論]:由上可知，若特徵方程式具相異共軛複根$D=\alpha\pm i\beta, D=\gamma\pm i\delta$，其相對

齊次解爲 $$y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)+e^{\gamma x}(c_3\cos\delta x+c_4\sin\delta x)$$

(B)特徵方程式的根爲重根

例題: (90 中山材料)

試求下列初值問題

$$y''+6y'+9y=0 \qquad y(0)=-4 \quad y'(0)=14$$

[解法]: 特徵方程式: $D^2+6D+9=0 \quad D=-3,-3$

$$y=c_1e^{-3x}+c_2xe^{-3x}$$

$$\because \begin{cases} y(0)=-4 \\ y'(0)=14 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1=-4 \\ -3c_1+c_2=14 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1=-4 \\ c_2=2 \end{cases}$$

$$y=-4e^{-3x}+2xe^{-3x}$$

[說明]: $y''+6y'+9y=0$

$(D+3)(D+3)y=0$ ------------------------------------(a)

令 $(D+3)y=z$ ------------------------------------(b)

(a)式得 $(D+3)z=0$

$\frac{dz}{dx}+3z=0 \qquad z=c_3e^{-3x}$ 帶回(b)式

$$\frac{dy}{dx}+3y=c_3e^{-3x}$$

$$y=(c_1+\int e^{3x}\cdot c_2e^{-3x}dx)e^{-3x}=c_1e^{-3x}+c_2xe^{-3x}$$

[說明]:利用降階法，已知一個齊次解爲 e^{-3x}

令 $y=e^{-3x}v(x) \quad y'=-3e^{-3x}v+e^{-3x}v' \quad y''=9e^{-3x}v-6e^{-3x}v'+e^{-3x}v''$ 帶回原 O.D.E.

$e^{-3x}v''=0 \qquad v''=0 \qquad v=c_1+c_2x$

$\therefore \quad y=e^{-3x}v(x)=c_1e^{-3x}+c_2xe^{-3x}$

[註]:由上可知，若特徵方程式具重根$D=D_1,D_1$，其相對齊次解爲

$$y=c_1e^{D_1x}+c_2xe^{D_1x}$$

[推論]:若特徵方程式爲$(D-a)^3=0$

$$y=c_1e^{ax}+c_2xe^{ax}+c_3'\frac{x^2}{2}e^{ax}=c_1e^{ax}+c_2xe^{ax}+c_3x^2e^{ax}$$

[推論]:若特徵方程式爲$[D-(\alpha\pm i\beta)]^2=0$

$$y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)+xe^{\alpha x}(c_3\cos\beta x+c_4\sin\beta x)$$

例題:　(90 交大光電)

二階 O.D.E. $ay''+by'+c=0$ 其中 a,b,c 爲常數，試問 a,b,c 在何種條件下，使得上述 O.D.E.的解範圍爲 $y<\infty$ ？

[解法]:

因題目爲二階 O.D.E. $\therefore a\neq 0$

$$aD^2+bD+c=0 \qquad D=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

(i) $b^2-4ac>0$

$$y=c_1e^{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}x}+c_2e^{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}x}$$

欲使 $y<\infty \quad\rightarrow\quad \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}<0$ 且 $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}<0$

因 $(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a})(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a})>0 \quad\Rightarrow\quad ac>0$

(ii) $b^2-4ac=0$

$$y=c_3e^{\frac{-b}{2a}x}+c_4xe^{\frac{-b}{2a}x}$$

欲使 $y<\infty \quad\rightarrow\quad \frac{-b}{2a}<0 \quad\rightarrow\quad \frac{b}{a}>0$

(iii) $b^2-4ac<0$

$$y=e^{\frac{-b}{2a}x}(c_5\cos\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}x+c_6\sin\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}x)$$

欲使 $y<\infty \quad\rightarrow\quad \frac{-b}{2a}<0 \quad\rightarrow\quad \frac{b}{a}>0$

例題:　(91 台大生物機電)

$y''+Ay'+By=0 \qquad y(0)=2 \qquad y'(0)=-3$ 的解爲

$$y=e^{-x}(C\cos\sqrt{2}x+D\sin\sqrt{2}x)$$

其中 A,B,C,D 皆爲常數，試求 A,B,C,D 之值？

[解法]: $y=e^{-x}(C\cos\sqrt{2}x+D\sin\sqrt{2}x) \quad\Rightarrow$ 特徵方程式的根爲 $-1\pm i\sqrt{2}$

$$-A=(-1+i\sqrt{2})+(-1-i\sqrt{2}) \quad\Rightarrow\quad A=2$$

$$B=(-1+i\sqrt{2})\times(-1-i\sqrt{2}) \quad\Rightarrow\quad B=3$$

$$y(0)=2 \quad\Rightarrow\quad C=2$$

$$y'(0) = -3 \quad \Rightarrow \quad D = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

例題: (90 臺大電機)

二學生同時解下列初值問題

$$y''+ay'+by=0 \qquad y(0)=A \qquad y'(0)=B$$

若其中一人看錯常數 b, B，所得解爲 $y = e^{-2x}(\cos 3x + 2\sin 3x)$。

若另一人看錯常數 a, A，所得解爲 $y = -3e^{x} + 2e^{3x}$。試求正確常數 a, b, A, B 及微分方程式的解？

[解法]: 特徵方程式: $D^2 + aD + b = 0$

其中一解爲 $y = e^{-2x}(\cos 3x + 2\sin 3x)$ $\Rightarrow$ 特徵方程式的根爲 $-2 \pm i3$

因看錯 b，但 a 仍正確 $\Rightarrow$ $-a = (-2+i3)+(-2-i3)$ $\Rightarrow$ $a = 4$

又因 A 正確 $\Rightarrow$ $y(0) = e^{-2x}(\cos 3x + 2\sin 3x)\Big|_{x=0} = 1 = A$

另一解爲 $y = -3e^{x} + 2e^{3x}$ $\Rightarrow$ 特徵方程式的根爲 1,3

因看錯 a，但 b 仍正確 $\Rightarrow$ $b = 1 \times 3 = 3$

又因 B 正確 $\Rightarrow$ $y'(0) = -3e^{x} + 6e^{3x}\Big|_{x=0} = 3 = B$

得 $a = 4$，$b = 3$，$A = 1$，$B = 3$，原 O.D.E.得

$$y''+4y'+3y=0 \qquad y(0)=1 \qquad y'(0)=3$$

$$y = 3e^{-x} - 2e^{-3x}$$

5.等維型變係數齊次常微分方程式

(A)Euler-Cauchy 型等維變係數齊次常微分方程式

合乎下列型式的 O.D.E.稱爲 Euler-Cauchy 型等維(equidimensional)變係數齊次常微分方程式

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = 0$$

其中 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ 爲常數，且上式在 $(-\infty, 0)$ 與 $(0, \infty)$ 上爲正規。例如

$$x^3 y''' - 2x^2 y'' + xy' - y = 0$$

即爲 Euler-Cauchy 型等維變係數齊次常微分方程式

處理上述等維型變係數齊次常微分方程式時，若可化爲前面單元所提之常係數齊次常微分方程式，則可利用特徵方程式來求得齊次解。因此，我們利用變數變換的方法，將等維型變係數齊次常微分方程式轉爲常係數齊次常微分方程式

令 $\begin{cases} x = e^t & (x>0) \\ -x = e^t & (x<0) \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} t = \ln x \\ t = \ln|x| \end{cases}$ $\Rightarrow$ $|x| = e^t, t = \ln|x|, x \neq 0$

取 $D=\frac{d}{dt}$

$$xy'=x\frac{dy}{dx}=x\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}=Dy$$

$$x^2y''=x^2\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=x^2\frac{d}{dx}(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt})=x^2[-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dt})]$$

$$=x^2[-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dt})\frac{dt}{dx}]=x^2[-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}]$$

$$=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}=D(D-1)y$$

同理可推 $x^3y'''=D(D-1)(D-2)y$

則 Euler-Cauchy 型等維變係數齊次常微分方程式將可轉爲常係數齊次常微分方程式

例題: (91 中興環工)

試求下列常微分方程式 $x^2y''+2xy'-6y=0$

[解法]: 令 $|x|=e^t$ ， $t=\ln|x|$ ， $D=\frac{d}{dt}$ ，原 O.D.E.得

$[D(D-1)+2D-6]y=0$

$D^2+D-6=0$ $(D+3)(D-2)=0$ $D=-3,D=2$

$y(t)=c_3e^{-3t}+c_2e^{2t}$

$y(x)=c_3\left|x^{-3}\right|+c_2\left|x^2\right|=c_1x^{-3}+c_2x^2$ $x\in(-\infty,0),(0,\infty)$

[另解]:由上述例題知，Euler-Cauchy 型等維變係數齊次常微分方程式解的型式爲 x^m

令 $y=x^m$ ， $y'=mx^{m-1}$ ， $y''=m(m-1)x^{m-2}$ 帶回原 O.D.E.得

$[m(m-1)+2m-6]x^m=0$

$m^2+m-6=0$ $(m+3)(m-2)=0$ $m=-3,m=2$

$y(x)=c_1x^{-3}+c_2x^2$

[註]:由上可知，若以 $y=x^m$ 帶入 O.D.E.時，當 m 具相異實根 $m=m_1,m_2$ ，其相對齊次解爲 $y=c_1x^{m_1}+c_2x^{m_2}$

例題: (91 中央環工)

試求下列常微分方程式 $x^2y''-xy'+y=0$

[解法]: 令 $|x|=e^t$ ， $t=\ln|x|$ ， $D=\frac{d}{dt}$ ，原 O.D.E.得

$[D(D-1)-D+1]y=0$

$$D^2-2D+1=0 \qquad D=1,1$$

$$y(t)=c_3e^t+c_4t\cdot e^t$$

$$y(x)=c_3|x|+c_4\ln|x|\cdot|x|$$

$$y(x)=c_1x+c_2x\ln|x| \qquad x\in(-\infty,0),(0,\infty)$$

[另解]:令 $y=x^m$ ， $y'=mx^{m-1}$ ， $y''=m(m-1)x^{m-2}$ 帶回原 O.D.E.得

$$[m(m-1)-m+1]x^m=0$$

$$m^2-2m+1=0 \qquad m=1,1$$

得一個齊次解爲 $y=x$

由降階法，令 $y=xv$ ， $y'=v+xv'$ ， $y''=2v'+xv''$ ，帶回原 O.D.E.得

$$x^2(2v'+xv'')-x(v+xv')+xv=0$$

$$x^3v''+x^2v'=0 \qquad v''+\frac{1}{x}v'=0 \qquad v'=c_2e^{-\int\frac{1}{x}dx}=c_2e^{-\ln|x|}=\frac{c_2}{x}$$

$$v=c_2\ln|x|+c_1$$

$$y=xv=c_1x+c_2x\ln|x| \qquad x\in(-\infty,0),(0,\infty)$$

[註]:由上可知，若以 $y=x^m$ 帶入 O.D.E.時，當 m 具重根 $m=m_1,m_1$ ，其相對齊次解爲 $y=c_1x^{m_1}+c_2x^{m_1}\ln|x|$

[推論]:若以 $y=x^m$ 帶入 O.D.E.時，當 m 具重根 $m=m_1,m_1,m_1$ ，其相對齊次解爲

$$y=c_1x^{m_1}+c_2x^{m_1}\ln|x|+c_3x^{m_1}(\ln|x|)^2$$

例題: (91 臺大電機)(91 中正電機)

試求下列常微分方程式 $x^3y'''+5x^2y''+7xy'+8y=0$

[解法]: 令 $|x|=e^t$ ， $t=\ln|x|$ ， $D=\dfrac{d}{dt}$ ，原 O.D.E.得

$$[D(D-1)(D-2)+5D(D-1)+7D+8]y=0$$

$$D^3+2D^2+4D+8=0 \qquad (D+2)(D^2+4)=0 \qquad D=-2, D=\pm 2i$$

$$y(t)=c_1e^{-2t}+c_2\cos 2t+c_3\sin 2t$$

$$y(x)=c_1\left|x^{-2}\right|+c_2\cos(2\ln|x|)+c_3\sin(2\ln|x|)$$

$$y(x)=c_1x^{-2}+c_2\cos(2\ln|x|)+c_3\sin(2\ln|x|) \qquad x\in(-\infty,0),(0,\infty)$$

[另解]:令 $y=x^m$ ， $y'=mx^{m-1}$ ， $y''=m(m-1)x^{m-2}$ 帶回原 O.D.E.得

$$[m(m-1)(m-2)+5m(m-1)+7m+8]x^m=0$$

$$m^3+2m^2+4m+8=0 \qquad (m+2)(m^2+4)=0 \qquad m=-2, m=\pm 2i$$

$$y=c_1x^{-2}+Ax^{2i}+Bx^{-2i}=c_1x^{-2}+Ae^{\ln|x^{2i}|}+Be^{\ln|x^{-2i}|}$$

$$=c_1x^{-2}+Ae^{i(2\ln|x|)}+Be^{-i(2\ln|x|)}$$

$$=c_1x^{-2}+(A+B)\cos(2\ln|x|)+(Ai-Bi)\sin(2\ln|x|)$$

$$=c_1x^{-2}+c_2\cos(2\ln|x|)+c_3\sin(2\ln|x|)$$

[註]:由上可知，若以 $y=x^m$ 帶入 O.D.E.時 m 具相異共軛複根 $m=\alpha\pm i\beta$，其相對齊次解爲 $y=x^{\alpha}[c_1\cos(\beta\ln|x|)+c_2\sin(\beta\ln|x|)]$

(B)Legendre 型等維變係數齊次常微分方程式

合乎下列型式的 O.D.E.稱爲 Legendre 型等維(equidimensional)變係數齊次常微分方程式

$$a_n(bx+c)^n y^{(n)}+a_{n-1}(bx+c)^{n-1}y^{(n-1)}+\Lambda+a_1(bx+c)y'+a_0y=0 \qquad \text{--⑧}$$

其中 $a_n,a_{n-1},\Lambda,a_1,a_0$ 爲常數，且上式在 $(-\infty,-\frac{c}{b})$ 與 $(-\frac{c}{b},\infty)$ 上爲正規。

例如

$$(2x-3)^2y''+7(2x-3)y'+4y=0$$

即爲 Legendre 型等維變係數齊次常微分方程式

處理方法爲利用變數變換，先將 Legendre 型等維變係數齊次常微分方程式轉爲 Euler-Cauchy 型等維變係數齊次常微分方程式。

令 $z=bx+c$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}=b\frac{dy}{dz}$$

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{d}{dx}(b\frac{dy}{dz})=\frac{d}{dz}(b\frac{dy}{dz})\frac{dz}{dx}=b^2\frac{d^2y}{dz^2}$$

同理可推 $y'''=b^3\frac{d^3y}{dz^3}$

則⑧式改爲

$$a_nb^nz^n\frac{d^ny}{dz^n}+a_{n-1}b^{n-1}z^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}}+\Lambda+a_1bz\frac{dy}{dz}+a_0y=0$$

爲 Euler-Cauchy 型等維變係數齊次常微分方程式

例題: (90 成大水利及海洋)

試求下列常微分方程式 $(2x-3)^2 y''+7(2x-3)y'+4y=0$

[解法]: 令 $z=2x-3$ 原 O.D.E.改爲

$$2^2\cdot z^2\frac{d^2y}{dz^2}+7\cdot 2\cdot z\frac{dy}{dz}+4y=0$$

爲 Euler-Cauchy 型等維變係數齊次常微分方程式

令 $y=z^m$ 帶回上式

$$4m(m-1)+14m+4=0 \qquad m=-\frac{1}{2}\text{，}m=-2$$

$$y(z)=c_1z^{-\frac{1}{2}}+c_2z^{-2}$$

$$y(x)=c_1(2x-3)^{-\frac{1}{2}}+c_2(2x-3)^{-2}$$

例題: (91 北科大電腦通訊與控制)

試求下列常微分方程式 $(x^2+2x+1)y''+(5x+5)y'+5y=0$

[解法]: $(x+1)^2y''+5(x+1)y'+5y=0$

令 $z=x+1$ 上式改爲

$z^2\dfrac{d^2y}{dz^2}+5z\dfrac{dy}{dz}+5y=0$ 爲 Euler-Cauchy 型等維變係數齊次常微分方程式

令 $y=z^m$ 帶回上式

$$m(m-1)+5m+5=0 \qquad m=-2\pm i$$

$$y(z)=z^{-2}[c_1\cos(\ln|z|)+c_2\sin(\ln|z|)]$$

$$y(x)=(x+1)^{-2}[c_1\cos(\ln|x+1|)+c_2\sin(\ln|x+1|)]$$

例題: (92 雲科大電機)

試求 $(3x-4)^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+3(3x-4)\dfrac{dy}{dx}+36y=0$

[解法]：令 $z=3x-4$ $\quad \dfrac{dy}{dx}=3\dfrac{dy}{dz} \quad \dfrac{d^2y}{dx^2}=9\dfrac{d^2y}{dz^2}$ 原 O.D.E.得

$$9z^2\frac{d^2y}{dz^2}+9z\frac{dy}{dz}+36y=0$$

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2}+z\frac{dy}{dz}+4y=0$$

令 $y=z^m$

$$m(m-1)+m+4=0 \ \Rightarrow\ m^2+4=0 \ \Rightarrow\ m=\pm 2i$$

$$\therefore\ y(z)=c_1\cos(2\ln|z|)+c_2\sin(2\ln|z|)$$

$$y(x) = c_1 \cos(2\ln|3x-4|) + c_2 \sin(2\ln|3x-4|)$$

本節習題

1.二階 O.D.E. $ay''+by'+cy=0$ a,b,c 爲常數，試求 $y(x)$ ？ (91 淡江土木)

(i) $b^2 = 4ac$ (ii) $b^2 = 3ac$

[ans]: (i) $y = c_1 e^{-\frac{b}{2a}x} + c_2 x e^{-\frac{b}{2a}x}$ (ii) $y = e^{-\frac{b}{2a}x}(c_1 \cos\frac{\sqrt{ac}}{2a}x + c_2 \sin\frac{\sqrt{ac}}{2a}x)$

2. $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$ (89 清大物理)

[ans]: $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x(c_3 \cos x + c_4 \sin x)$

3. $y''+y'-2y=0$ (88 中山環工)

[ans]: $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x}$

4. $y''-4y'+4y=0$ (88 中山環工)

[ans]: $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$

5. $y'''+3y''+y'+3y=0$ (88 交大電控)

[ans]: $y = c_1 e^{-3x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x$

6. $y^{(4)} + \beta^4 = 0$ （88 中央機械）

【ans】: $y = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{2}}{2}\beta x + c_2 \sin\frac{\sqrt{2}}{2}\beta x\right) + e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{2}}{2}\beta x + c_2 \sin\frac{\sqrt{2}}{2}\beta x\right)$

7. $y'' - 4y' + 3y = 0$ $y(0) = 4$ $y'(0) = 0$ （87 成大航太）

【ans】: $y = 6e^{x} - 2e^{3x}$

8. $y'' - 4y' + 3y = 0$ $y(0) = -1$ $y'(0) = 3$ （87 清大電機）

【ans】: $y = -3e^{x} + 2e^{3x}$

9. $y'' - 8y' + 16y = 0$ （87 成大製造）

【ans】: $y = c_1 e^{-4x} + c_2 x e^{-4x}$

10. $y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0$ （91 淡江水資源）

【ans】: $y = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln|x|$

11. $(x+1)^2 y'' - (x+1)y' + y = 0$ $y(0) = 1$ ， $y'(0) = 0$ （90 交大光電）

【ans】: $y = (x+1) - (x+1)\ln|x+1|$

12. $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0$ （90 中山物理）

【ans】: $y = c_1 x + c_2 (x^2 - 1)$

13. $(x-1)y''-xy'+y=0$ （90 台科大自動化）

【ans】：$y=c_1x+c_2e^x$

14 $x(x-1)y''-xy'+y=0$ （90 成大機械）

【ans】：$y=c_1x+c_2\left[x\ln|x|+1\right]$

15. $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$ （90 南台機械）

【ans】：$y=c_1x+c_2\left[x\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+2\right]$

16 $(x^2+1)y''-2xy'+2y=6(x^2+1)^2$ （90 中山海環）

【ans】：$y=x^4+3x^2+c_1x+c_2(x^2-1)$

17. $(2x^2+1)y''-4xy'+4y=0$ (88 中原機械)

$[ans]: y=c_1x+c_2\left(x^2-\dfrac{1}{2}\right)$

18. $xy''+2(1-x)y'+(x-2)y=2e^x$ (88 中央光電)

$[ans]: y=c_1e^x+c_2\dfrac{e^x}{x}+xe^x$

19. $xy''+(1-2x)y'+(x-1)y=0$ (88 北科大生化)

$[ans]: y=c_1e^x+c_2e^x\ln|x|$

20. $(x^2-x)y''-xy'+y=0$ (87 交大機械)

$[ans]: y=c_1(x\ln|x|+1)+c_2x$

21. $y''+8ty'-8y=0$ (87 台科大化工)

$[ans]: y=c_1t\int\dfrac{e^{-4t^2}}{t^2}dt+c_2t$

22. $(1+x)x^2y''-(1+2x)xy'+(1+2x)y=0$ (87 成大土木)

$[ans]: y=c_1(x^2+x\ln|x|)+c_2x$

23. $y''+2xy'+(x^2+2)y=0$ (清大化工)

$[ans]: y=e^{-\frac{1}{2}x^2}(c_1\cos x+c_2\sin x)$

24 下列那一組函數是線性相依 （88 台大電機）

$(A)e^{2x}$ ， e^{-2x} ， $\sinh 2x$ $(B)\sin 2x$ ， $\cosh 2x$ ， $2x$

$(C)e^{x}$ ， e^{2x} ， e^{3x} $(D)x^2$ ， x^4 ， x^6-2x^2

$(E)e^{3x}$ ， e^{-3x} ， e^{2x}

$[ans]$ ： (A)

25 下列那一組函數是線性獨立？ （88 交大電子）

$(A) e^x$ ， x 　　　　　　$(B) x$ ， x^2

$(C) \sin x$ ， $\cos x$ 　　　　　　$(D) x$ ， $\sin x$

$(E) \cos x$ ， $\cos 3x$

$[ans]$ ： $(A)(B)(C)(D)(E)$

26 試求 x ， x^2 的 Wronskian 行列式？ （88 清大材料）

$[ans]$ ： $W(x) = x^2$

27 證明 1 ， x ， x^2 爲線性獨立。 （87 成大製造）

28 下列那一組函數是線性相依？ （88 中山環工）

$(A) e^{2x}$ ， e^{-2x} $(-\infty < x < \infty)$ 　　　　$(B) x+1$ ， $x-1$ $(0 < x < 1)$

$(C) \ln x$ ， $\ln x^2$ $(x > 0)$

$[ans]$ ： (C)