2.2 N 階線性非齊次常微分方程式的特解(待定係數法)

定理: n 階線性非齊次常微分方程式

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \qquad x \in (a,b) \qquad \text{-----①}$$

爲正規(normal)，且 $f(x) = \sum_{i=1}^{r} f_i(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_r(x)$。若 $y_{p_i}(x)$ 分別爲適合 $f_i(x)$ 之特解，則

$$y_p(x) = \sum_{i=1}^{r} y_{p_i}(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + \cdots + y_{p_r}(x)$$

爲①式的特解

[証明]: ∵ $y_{p_i}(x)$ 分別爲適合 $f_i(x)$ 之特解

$$a_n(x)y_{p_1}^{(n)} + a_{n-1}(x)y_{p_1}^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y_{p_1}' + a_0(x)y_{p_1} = f_1(x)$$

$$a_n(x)y_{p_2}^{(n)} + a_{n-1}(x)y_{p_2}^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y_{p_2}' + a_0(x)y_{p_2} = f_2(x)$$

$$\vdots$$

$$a_n(x)y_{p_r}^{(n)} + a_{n-1}(x)y_{p_r}^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y_{p_r}' + a_0(x)y_{p_r} = f_r(x)$$

將上面各式相加

$$\begin{aligned} &a_n(x)[y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + \cdots + y_{p_r}(x)]^{(n)} \\ &+ a_{n-1}(x)[y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + \cdots + y_{p_r}(x)]^{(n-1)} + \cdots \\ &+ a_1(x)[y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + \cdots + y_{p_r}(x)]' \\ &+ a_0(x)[y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + \cdots + y_{p_r}(x)] = f(x) \end{aligned}$$

與①式比較

$$\therefore \quad y_p(x) = \sum_{i=1}^{r} y_{p_i}(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + \cdots + y_{p_r}(x) \quad \text{爲①式的特解}$$

上述定理說明：當強制函數 $f(x)$ 爲不同函數所組合而成時，可先針對個別函數求出個別函數的特解，最後再將個別函數的特解相加即可。以下我們開始介紹待定係數法

待定係數法(Undetermined Coefficient Method)顧名思義即有係數未知而等待我們去把它求出。考慮下面 n 階常係數 O.D.E.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x) \qquad \text{-----②}$$

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) + y_p(x)$$

$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$ 爲齊次解，$y_p(x)$ 爲特解，其中

$a_n, a_{n-1}, \Lambda, a_1, a_0, c_1, c_2, \Lambda, c_n$ 爲常數。$y_p(x)$ 可假設爲 $f(x)$ 帶回原 O.D.E.經微分後有限線性獨立項函數之線性組合而成。此種方法條件限制爲只適用於常係數 O.D.E.，且強制函數 $f(x)$ 僅能爲正弦函數 $(\sin\beta x)$ 、餘弦函數 $(\cos\beta x)$ 、指數函數 $(e^{\alpha x})$ 、多項式 $(x^n, n>1$ *之整數*$)$ 或上述函數之組合函數。

1. $f(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \Lambda + A_1 x + A_0$

$f(x)$ 帶回②式等號左側，經微分後線性獨立項函數爲 $x^n, x^{n-1}, \Lambda, x, 1$ ，經線性組合，令

$$y_p(x) = B_n x^n + B_{n-1}x^{n-1} + \Lambda + B_1 x + B_0$$

帶回原 O.D.E.，求出待定係數 $B_n, B_{n-1}, \Lambda, B_1, B_0$ 。

[註]:若 $f(x) = A_0$ ，此爲上述多項式的特殊情況，因此 $y_p(x)$ 必爲常數，令

$$y_p(x) = B_0$$

則 $B_0 = \dfrac{A_0}{a_0}$

例題: (90 屏科大機械)

試求下列常微分方程式 $y^{(4)} - 10y'' + 9y = x^2 + 1$

[解法]: $D^4 - 10D^2 + 9 = 0$ $\quad (D^2-1)(D^2-9) = 0$ $\quad D = \pm 1, D = \pm 3$

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-3x}$$

令 $y_p(x) = B_2 x^2 + B_1 x + B_0$ $\quad y_p'(x) = 2B_2 x + B_1$ $\quad y_p''(x) = 2B_2$

$y_p'''(x) = 0$ $\quad y_p^{(4)}(x) = 0$ 帶回原 O.D.E.

$$9B_2 x^2 + 9B_1 x + (-20B_2 + 9B_0) = x^2 + 1$$

$$B_2 = \frac{1}{9} \qquad B_1 = 0 \qquad B_0 = \frac{29}{81}$$

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-3x} + \frac{1}{9}x^2 + \frac{29}{81}$$

例題: (90 交大土木)

試求下列常微分方程式 $y'' + 2y' = 4x^2$

[解法]: $D^2 + 2D = 0$ $\quad D(D+2) = 0$ $\quad D = 0, D = -2$

$$y_h(x) = c_1 + c_2 e^{-2x}$$

令 $y_p(x) = B_3 x^3 + B_2 x^2 + B_1 x$ $\quad y_p'(x) = 3B_3 x^2 + 2B_2 x + B_1$

$y_p''(x) = 6B_3 x + 2B_2$ 帶回原 O.D.E.

$$6B_3 x^2 + (6B_3 + 4B_2)x + (2B_2 + 2B_1) = 4x^2$$

$$B_3 = \frac{2}{3} \qquad B_2 = -1 \qquad B_1 = 1$$

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 + c_2 e^{-2x} + \frac{2}{3}x^3 - x^2 + x$$

例題： (90 成大土木) Obtain a power series particular solution valid near $x = 0$ for $x^2 \dfrac{d^2 y}{dx^2} + y = \dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$

[解法]：
$$\frac{e^x}{\sqrt{x}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}{\sqrt{x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n-\frac{1}{2}}}{n!}$$

令 $y_p(x) = \dfrac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sqrt{x}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-\frac{1}{2}}$

$$y_p'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n - \frac{1}{2}) x^{n-\frac{3}{2}}$$

$y_p''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2}) x^{n-\frac{5}{2}}$ 帶回原 O.D.E.

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2}) x^{n-\frac{5}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n-\frac{1}{2}}}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n [(n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2}) + 1] x^{n-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n-\frac{1}{2}}}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n^2 - 2n + \frac{7}{4}) x^{n-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n-\frac{1}{2}}$$

$$a_n (n^2 - 2n + \frac{7}{4}) = \frac{1}{n!} \qquad (n \ge 0)$$

$$a_n = \frac{1}{(n^2 - 2n + \frac{7}{4})n!} \qquad (n \geq 0)$$

$$y_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n^2 - 2n + \frac{7}{4})n!} x^{n-\frac{1}{2}}$$

2. $f(x) = e^{\alpha x}(A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \Lambda + A_1 x + A_0)$

$f(x)$帶回②式等號左側，經微分後線性獨立項函數為
$e^{\alpha x}x^n, e^{\alpha x}x^{n-1}, \Lambda, e^{\alpha x}x, e^{\alpha x}$，經線性組合，令
(A)若齊次解中不包含$e^{\alpha x}$，令

$$y_p(x) = e^{\alpha x}(B_n x^n + B_{n-1}x^{n-1} + \Lambda + B_1 x + B_0)$$

例題: (90 交大光電)
試求下列常微分方程式 $y'' + y = xe^x$

[解法]: $D^2 + 1 = 0$ $D = \pm i$ $y_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

因 $f(x) = xe^x$ 有包含 e^x 型式，$y_p(x)$ 必包含有 e^x 型式

令 $y_p(x) = e^x v(x)$ $y_p'(x) = e^x v(x) + e^x v'(x)$

$y_p''(x) = e^x v(x) + 2e^x v'(x) + e^x v''(x)$ 帶回原 O.D.E.

$2e^x v(x) + 2e^x v'(x) + e^x v''(x) = xe^x$
$v''(x) + 2v'(x) + 2v(x) = x$
令 $v(x) = B_1 x + B_0$ $v'(x) = B_1$ 帶回上式

$2B_1 x + (2B_0 + 2B_1) = x$ $B_1 = \frac{1}{2}$ $B_0 = -\frac{1}{2}$

$$v(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$y_p(x) = e^x v(x) = e^x(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2})$$

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + e^x(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2})$$

[另解]:因齊次解中不包含e^x，可令

$y_p(x) = e^x(B_1 x + B_0)$ $y_p'(x) = e^x(B_1 x + B_0 + B_1)$

$y_p''(x)=e^x(B_1x+B_0+2B_1)$ 帶回原 O.D.E.

$e^x(2B_1x+2B_0+2B_1)=xe^x$ $B_1=\frac{1}{2}$ $B_0=-\frac{1}{2}$

$\therefore$ $y_p(x)=e^x(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2})$

$y(x)=y_h(x)+y_p(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+e^x(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2})$

[另種 $y_p(x)$ 判定法]:

$y''+y=xe^x$

$(D^2+1)y=xe^x$ ----------------------(a)

考慮讓上式成爲齊次 O.D.E.

$(D^2+1)(D-1)^2y=(D-1)^2xe^x=0$ -----------------------(b)

對 y 而言同時滿足(a)式及(b)式

由(a)式 $y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+y_p(x)$ ------------------------(c)

由(b)式 $y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+B_2e^x+B_1xe^x$ ----------------------(d)

比較(c)(d)兩式知，須令

$$y_p(x)=B_0e^x+B_1xe^x=e^x(B_1x+B_0)$$

[註]:若 $f(x)=A_0e^{\alpha x}$，此爲上述 $f(x)=e^{\alpha x}(A_nx^n+A_{n-1}x^{n-1}+\Lambda+A_1x+A_0)$ 的特殊情況，令

$$y_p(x)=B_0e^{\alpha x}$$

例題: (91 中山光電)

試求下列常微分方程式 $y''-2y'+2y=e^{-x}$

[解法]: $D^2-2D+2=0$ $D=1\pm i$ $y_h(x)=e^x(c_1\cos x+c_2\sin x)$

因齊次解中不包含 e^{-x}，可令

$y_p(x)=B_0e^{-x}$ $y_p'(x)=-B_0e^{-x}$ $y_p''(x)=B_0e^{-x}$ 帶回原 O.D.E.

$e^{-x}(B_0+2B_0+2B_0)=e^{-x}$ $B_0=\frac{1}{5}$

$y_p(x)=\frac{1}{5}e^{-x}$

$$y(x)=y_h(x)+y_p(x)=e^x(c_1\cos x+c_2\sin x)+\frac{1}{5}e^{-x}$$

[另種 $y_p(x)$ 判定法]:

$y''-2y'+2y=e^{-x}$

$(D^2-2D+2)y=e^{-x}$ ----------------------(a)

考慮讓上式成爲齊次 O.D.E.

$(D^2-2D+2)(D+1)y=(D+1)e^{-x}=0$ ----------------------(b)

對 y 而言同時滿足(a)式及(b)式

由(a)式 $y(x)=e^x(c_1\cos x+c_2\sin x)+y_p(x)$ ----------------------(c)

由(b)式 $y(x)=e^x(c_1\cos x+c_2\sin x)+B_0e^{-x}$ ----------------------(d)

比較(c)(d)兩式知，須令

$$y_p(x)=B_0e^{-x}$$

(B)若齊次解中包含 $e^{\alpha x}$ ，但不包含 $xe^{\alpha x}$ ，令

$$y_p(x)=xe^{\alpha x}(B_nx^n+B_{n-1}x^{n-1}+\Lambda+B_1x+B_0)$$

例題: (91 海洋電機)

試求下列常微分方程式 $y''-y=xe^x$

[解法]: $D^2-1=0$ $D=\pm1$ $y_h(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}$

因 $f(x)=xe^x$ 有包含 e^x 型式，$y_p(x)$ 必包含有 e^x 型式

令 $y_p(x)=e^xv(x)$ $y_p'(x)=e^xv(x)+e^xv'(x)$

$y_p''(x)=e^xv(x)+2e^xv'(x)+e^xv''(x)$ 帶回原 O.D.E.

$2e^xv'(x)+e^xv''(x)=xe^x$

$v''(x)+2v'(x)=x$

令 $v(x)=B_2x^2+B_1x$ (*不須假設* B_0 *,因* B_0e^x *可歸到齊次解*)

$v'(x)=2B_2x+B_1$ $v''(x)=2B_2$ 帶回上式

$4B_2x+(2B_2+2B_1)=x$ $B_2=\frac{1}{4}$ $B_1=-\frac{1}{4}$

$$y_p(x) = e^x v(x) = e^x(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x)$$

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^x(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x)$$

[另解]: 因齊次解中包含e^x ，但不包含xe^x ，可令

$$y_p(x) = xe^x(B_2 x + B_1) = e^x(B_2 x^2 + B_1 x)$$

$$y_p'(x) = e^x(B_2 x^2 + B_1 x + 2B_2 x + B_1)$$

$$y_p''(x) = e^x(B_2 x^2 + B_1 x + 2B_2 x + B_1 + 2B_2 x + B_1 + 2B_2)$$

將 $y_p(x)$ ， $y_p'(x)$ ， $y_p''(x)$ 帶回原 O.D.E.

得 $B_2 = \frac{1}{4}$ $B_1 = -\frac{1}{4}$

$$y_p(x) = e^x(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x)$$

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^x(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x)$$

[另種$y_p(x)$判定法]:

$y'' - y = xe^x$

$(D+1)(D-1)y = xe^x$ ----------------------(a)

考慮讓上式成爲齊次 O.D.E.

$(D+1)(D-1)^3 y = (D-1)^2 xe^x = 0$ -----------------------(b)

對 y 而言同時滿足(a)式及(b)式

由(a)式 $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + y_p(x)$ -----------------------(c)

由(b)式 $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + B_1 xe^x + B_2 x^2 e^x$ ----------------------(d)

比較(c)(d)兩式知，須令

$$y_p(x) = B_1 xe^x + B_2 x^2 e^x$$

[註]:若 $f(x) = A_0 e^{\alpha x}$，此爲上述 $f(x) = e^{\alpha x}(A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \Lambda + A_1 x + A_0)$ 的特殊情況，令

$$y_p(x) = B_0 xe^{\alpha x}$$

例題: (89 雲科大電機)

試求下列常微分方程式 $y''-y'-2y=e^{-x}$

[解法]: $D^2-D-2=0$ $D=2, D=-1$ $y_h(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$

因齊次解中包含 e^{-x}，但不包含 xe^{-x}，可令

$y_p(x)=B_0xe^{-x}$ $y_p'(x)=e^{-x}(B_0-B_0x)$

$y_p''(x)=e^{-x}(-2B_0+B_0x)$ 帶回原 O.D.E.

$e^{-x}(-3B_0)=e^{-x}$ $B_0=-\dfrac{1}{3}$

$$y_p(x)=-\frac{1}{3}xe^{-x}$$

$$y(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}-\frac{1}{3}xe^{-x}$$

[另種 $y_p(x)$ 判定法]:

$y''-y'-2y=e^{-x}$

$(D-2)(D+1)y=e^{-x}$ ----------------------(a)

考慮讓上式成爲齊次 O.D.E.

$(D-2)(D+1)^2y=(D+1)e^{-x}=0$ ----------------------(b)

對 y 而言同時滿足(a)式及(b)式

由(a)式 $y(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}+y_p(x)$ ----------------------(c)

由(b)式 $y(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}+B_0xe^{-x}$ ---------------------(d)

比較(c)(d)兩式知，須令

$$y_p(x)=B_0xe^{-x}$$

例題: (91 交大土木)

常微分方程式 $y''-9y=4+5\sinh 3x$ $y(0)=2$ $y'(0)=2$

(i)試求齊次解

(ii)利用待定係數法求特解

(iii)求通解 $y(x)$

[解法]:

(i) $D^2-9=0$ $D=\pm 3$ $y_h(x)=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}$

(ii) $\sinh 3x=\dfrac{e^{3x}-e^{-3x}}{2}$

因齊次解中已包含e^{3x},e^{-3x}，先求 $y''-9y=5\sinh 3x$ 的特解$y_{p_1}(x)$

令 $y_{p_1}(x)=A_0x\cosh 3x+B_0x\sinh 3x$

$$y'_{p_1}(x)=(A_0+3B_0x)\cosh 3x+(3A_0x+B_0)\sinh 3x$$

$$y''_{p_1}(x)=(9A_0x+6B_0)\cosh 3x+(9B_0x+6A_0)\sinh 3x$$

將 $y_p(x)$，$y'_p(x)$，$y''_p(x)$ 帶回 $y''-9y=5\sinh 3x$ 中

$$6B_0\cosh 3x+6A_0\sinh 3x=5\sinh 3x$$

$$\begin{cases}6B_0=0\\6A_0=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B_0=0\\A_0=\dfrac{5}{6}\end{cases}$$

$$y_{p_1}(x)=\frac{5}{6}x\cosh 3x$$

再求 $y''-9y=4$ 的特解 $y_{p_2}(x)$ $\Rightarrow$ $y_{p_2}(x)=-\dfrac{4}{9}$

$$y_p(x)=y_{p_1}(x)+y_{p_2}(x)=\frac{5}{6}x\cosh 3x-\frac{4}{9}$$

(iii) $y(x)=y_h(x)+y_p(x)=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}+\dfrac{5}{6}x\cosh 3x-\dfrac{4}{9}$

$$\because\begin{cases}y(0)=2\\y'(0)=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_1+c_2-\dfrac{4}{9}=0\\3c_1-3c_2+\dfrac{5}{6}=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_1=\dfrac{51}{36}\\c_2=\dfrac{37}{56}\end{cases}$$

$$y(x)=\frac{51}{36}e^{3x}+\frac{37}{56}e^{-3x}+\frac{5}{6}x\cosh 3x-\frac{4}{9}$$

(C)若齊次解中包含$e^{\alpha x}$及$xe^{\alpha x}$，令

$$y_p(x)=x^2e^{\alpha x}(B_nx^n+B_{n-1}x^{n-1}+\Lambda+B_1x+B_0)$$

例題: (90 成大工科)

試求下列常微分方程式 $y''-2y'+y=x^2e^x$

[解法]: $D^2-2D+1=0$ $D=1,1$ $y_h(x)=c_1e^x+c_2xe^x$

因 $f(x)=x^2e^x$ 有包含 e^x 型式，$y_p(x)$ 必包含有 e^x 型式

令 $y_p(x)=e^x v(x)$ $\quad y_p'(x)=e^x v(x)+e^x v'(x)$

$y_p''(x)=e^x v(x)+2e^x v'(x)+e^x v''(x)$ 帶回原 O.D.E.

$e^x v''(x)=x^2e^x$

$v''(x)=x^2$ $\quad v'(x)=\dfrac{x^3}{3}$ (*不須假設常數，因可歸到齊次解*)

$v(x)=\dfrac{x^4}{12}$ (*不須假設常數，因可歸到齊次解*)

$$y_p(x)=e^x v(x)=\frac{x^4}{12}e^x$$

$$y(x)=y_h(x)+y_p(x)=c_1e^x+c_2xe^x+\frac{x^4}{12}e^x$$

[另解]: 因齊次解中包含 e^x 及 xe^x，可令

$$y_p(x)=x^2e^x(B_2x^2+B_1x+B_0)=e^x(B_2x^4+B_1x^3+B_0x_2)$$

將 $y_p(x)$，$y_p'(x)$，$y_p''(x)$ 帶回原 O.D.E.

得 $B_2=\dfrac{1}{12}$ $\quad B_1=0$ $\quad B_0=0$

$$y_p(x)=\frac{1}{12}x^4e^x$$

$$y(x)=y_h(x)+y_p(x)=c_1e^x+c_2xe^x+\frac{x^4}{12}e^x$$

[另種 $y_p(x)$ 判定法]:

$y''-2y'+y=x^2e^x$

$(D-1)^2y=x^2e^x$ ----------------------(a)

考慮讓上式成爲齊次 O.D.E.

$(D-1)^5y=(D-1)^3xe^x=0$ -----------------------(b)

對 y 而言同時滿足(a)式及(b)式

由(a)式 $y(x)=c_1e^x+c_2xe^x+y_p(x)$ -----------------------(c)

由(b)式 $y(x)=c_1e^x+c_2xe^x+B_0x^2e^x+B_1x^3e^x+B_2x^4e^x$ ---------------(d)

比較(c)(d)兩式知，須令

$$y_p(x) = B_0 x^2 e^x + B_1 x^3 e^x + B_2 x^4 e^x$$

[註]:若 $f(x) = A_0 e^{\alpha x}$，此爲上述 $f(x) = e^{\alpha x}(A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \Lambda + A_1 x + A_0)$ 的特殊情況，令

$$y_p(x) = B_0 x^2 e^{\alpha x}$$

例題: (89 雲科大電機)

試求下列常微分方程式 $y'' - 2y' + y = 2e^x$

[解法]: $D^2 - 2D + 1 = 0$ $D = 1, D = 1$ $y_h(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$

令 $y_p(x) = B_0 x^2 e^x$ $y_p'(x) = e^x(2B_0 x + B_0 x^2)$

$y_p''(x) = e^x(4B_0 x + B_0 x^2 + 2B_0)$ 帶回原 O.D.E.

$e^x(2B_0) = e^x$ $B_0 = 1$

$y_p(x) = x^2 e^x$

$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + x^2 e^x$

3. $f(x) = (p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \Lambda + p_o)\cos\beta x$ 或

$f(x) = (q_n x^n + q_{n-1}x^{n-1} + \Lambda + q_o)\sin\beta x$

$p_n, p_{n-1}, \Lambda, p_o, q_n, q_{n-1}, \Lambda, q_o, \beta$ 爲常數

$f(x)$ 帶回②式等號左側，經微分後線性獨立項函數爲

$x^n\cos\beta x, x^n\sin\beta x, x^{n-1}\cos\beta x, x^{n-1}\sin\beta x, \Lambda, x\cos\beta x, x\sin\beta x, \cos\beta x, \sin\beta x$，

經線性組合

(A)若齊次解中不包含 $\sin\beta x$ 或 $\cos\beta x$，令

$$y_p(x) = (A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \Lambda + A_0)\cos\beta x + (B_n x^n + B_{n-1}x^{n-1} + \Lambda + B_0)\sin\beta x$$

例題: (87 交大機械)

試求下列常微分方程式 $y'' - 4y' + 4y = x\cos x$

[解法]: $D^2 - 4D + 4 = 0$ $D = 2,2$ $y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$

因齊次解中不包含 $\sin x$ 或 $\cos x$，令

令 $y_p(x)=(A_1x+A_0)\cos x+(B_1x+B_0)\sin x$

$y'_p(x)=(A_1+B_1x+B_0)\cos x+(B_1-A_1x-A_0)\sin x$

$y''_p(x)=(2B_1-A_1x-A_0)\cos x+(-2A_1-B_1x-B_0)\sin x$

將 $y_p(x)$ ，$y'_p(x)$ ，$y''_p(x)$ 帶回原 O.D.E.

$$[(3A_1-4B_1)x+(2B_1-4A_1+3A_0-4B_0)]\cos x+[(3B_1+4A_1)x+(-2A_1-4B_1+3B_0+4A_0)]\sin x=x\cos x \quad \text{------(a)}$$

比較係數

$$\begin{cases} 3A_1-4B_1=1 \\ 2B_1-4A_1+3A_0-4B=0 \\ 3B_1+4A_1=0 \\ -2A_1-4B_1+3B_0+4A_0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1=\dfrac{3}{25} \\ A_0=\dfrac{4}{125} \\ B_1=-\dfrac{4}{25} \\ B_0=-\dfrac{22}{125} \end{cases}$$

$$y(x)=y_h(x)+y_p(x)=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+(\frac{3}{25}x+\frac{4}{125})\cos x+(-\frac{4}{25}x-\frac{22}{125})\sin x$$

[註]:在(a)式中讀者可發現：若將 $\cos x$ 項中係數 A 以 B 取代，B 以 $-A$ 取代即可得到 $\sin x$ 項中係數，藉此可判定出是否在整理過程中有錯誤。

[另種 $y_p(x)$ 判定法]:

$y''-4y'+4y=x\cos x$

$(D-2)^2y=x\cos x$ ----------------------(a)

考慮讓上式成為齊次 O.D.E.

$(D-2)^2(D^2+1)^2y=(D^2+1)^2x\cos x=0$ ----------------------(b)

對 y 而言同時滿足(a)式及(b)式

由(a)式 $y(x)=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+y_p(x)$ ----------------------(c)

由(b)式 $y(x)=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+A_0\cos x+B_0\sin x+A_1x\cos x+B_1x\sin x$ ------(d)

比較(c)(d)兩式知，須令

$$y_p(x)=A_0\cos x+B_0\sin x+A_1x\cos x+B_1x\sin x$$

$$y_p(x)=(A_1x+A_0)\cos x+(B_1x+B_0)\sin x$$

[註]:若 $f(x)=p_0\cos\beta x$ 或 $f(x)=q_0\sin\beta x$，此為上述

$$f(x)=(p_n x^n+p_{n-1}x^{n-1}+\Lambda+p_o)\cos\beta x$$ 或

$$f(x)=(q_n x^n+q_{n-1}x^{n-1}+\Lambda+q_o)\sin\beta x$$

的特殊情況，令

$$y_p(x)=A_0\cos\beta x+B_0\sin\beta x$$

例題: (91 暨南電機)

試求下列常微分方程式 $y''+4y'+4y=8\cos x+6\sin x$

[解法]: $D^2+4D+4=0$ $D=-2,-2$ $y_h(x)=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}$

因齊次解中不包含 $\sin x$ 或 $\cos x$，令

$$y_p(x)=A_0\cos x+B_0\sin x$$

$$y_p'(x)=B_0\cos x-A_0\sin x$$

$$y_p''(x)=-A_0\cos x-B_0\sin x$$

將 $y_p(x)$，$y_p'(x)$，$y_p''(x)$ 帶回原 O.D.E.

$$(3A_0+4B_0)\cos x+(3B_0-4A_0)\sin x=8\cos x+6\sin x \qquad \text{-----(a)}$$

比較係數

$$\begin{cases}3A_0+4B_0=8\\3B_0-4A_0=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_0=0\\B_0=2\end{cases}$$

$$y(x)=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}+2\sin x$$

[註]:在(a)式中讀者可發現：若將 $\cos x$ 項中係數 A 以 B 取代，B 以 $-A$ 取代即可得到 $\sin x$ 項中係數，藉此可判定出是否在整理過程中有錯誤。

(B)若齊次解中已包含 $\sin\beta x$ 或 $\cos\beta x$，令

$$y_p(x)=x(A_n x^n+A_{n-1}x^{n-1}+\Lambda+A_0)\cos\beta x+x(B_n x^n+B_{n-1}x^{n-1}+\Lambda+B_0)\sin\beta x$$

例題: (91 台科大機械)

試求下列常微分方程式 $y''+4y=x\cos 2x$

[解法]: $D^2+4=0$ $D=\pm 2i$ $y_h(x)=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$

因齊次解中已包含 $\cos 2x$，可令

$$y_p(x) = x(A_1x + A_0)\cos 2x + x(B_1x + B_0)\sin 2x$$

$$y_p'(x) = (2A_1x + A_0 + 2B_1x^2 + 2B_0x)\cos 2x + (2B_1x + B_0 - 2A_1x^2 - 2A_0x)\sin 2x$$

$$y_p''(x) = [(-4A_1x^2 + (8B_1 - 4A_0)x + (2A_1 + 4B_0)]\cos 2x$$
$$+[(-4B_1x^2 + (-8A_1 - 4B_0)x + (2B_1 - 4A_0)]\sin 2x$$

將 $y_p(x)$ ， $y_p'(x)$ ， $y_p''(x)$ 帶回原 O.D.E.

$$[8B_1x + (2A_1 + 4B_0)]\cos 2x + [-8A_1x + (2B_1 - 4A_0)]\sin 2x = x\cos 2x$$

比較係數

$$\begin{cases} 8B_1 = 1 \\ 2A_1 + 4B_0 = 0 \\ -8A_1 = 0 \\ 2B_1 - 4A_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_1 = \dfrac{1}{8} \\ B_0 = 0 \\ A_1 = 0 \\ A_0 = \dfrac{1}{16} \end{cases}$$

$$y(x) = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + \frac{x}{16}\cos 2x + \frac{x^2}{8}\sin 2x$$

[註]:若齊次解中已包含$\sin\beta x$或$\cos\beta x$，由經驗

當 $f(x) = x\cos\beta x$， $y_p(x)$ 僅含 $x\cos\beta x$ 及 $x^2\sin\beta x$

當 $f(x) = x\sin\beta x$ ， $y_p(x)$ 僅含 $x\sin\beta x$ 及 $x^2\cos\beta x$

[註]:若 $f(x) = p_0\cos\beta x$ 或 $f(x) = q_0\sin\beta x$，此爲上述

$$f(x) = (p_nx^n + p_{n-1}x^{n-1} + \Lambda + p_o)\cos\beta x \quad 或$$

$$f(x) = (q_nx^n + q_{n-1}x^{n-1} + \Lambda + q_o)\sin\beta x$$

的特殊情況，令

$$y_p(x) = A_0x\cos\beta x + B_0x\sin\beta x$$

例題: (87 台大土木)

試求下列常微分方程式 $y'' + \lambda^2 y = \cos\lambda x$

[解法]: $D^2 + \lambda^2 = 0$ $\quad D = \pm i\lambda$ $\quad y_h(x) = c_1\cos\lambda x + c_2\sin\lambda x$

因齊次解中已包含$\cos\lambda x$ ，可令

$$y_p(x) = A_0x\cos 2x + B_0x\sin 2x$$

$$y_p'(x) = (A_0 + \lambda B_0 x)\cos 2x + (B_0 - \lambda A_0 x)\sin 2x$$

$$y_p''(x) = (-\lambda^2 A_0 x + 2\lambda B_0)\cos 2x + (-\lambda^2 B_0 x - 2\lambda A_0)\sin 2x$$

將 $y_p(x)$ ， $y_p'(x)$ ， $y_p''(x)$ 帶回原 O.D.E.

$$2\lambda B_0 \cos 2x - 2\lambda A_0 \sin 2x = \cos 2x$$

比較係數

$$\begin{cases} 2\lambda B_0 = 1 \\ -2\lambda A_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_0 = \dfrac{1}{2\lambda} \\ A_0 = 0 \end{cases}$$

$$y(x) = c_1 \cos\lambda x + c_2 \sin\lambda x + \frac{x}{2\lambda}\sin\lambda x$$

[註]:若齊次解中已包含 $\sin\beta x$ 或 $\cos\beta x$ ，由經驗

當 $f(x) = \cos\beta x$ ， $y_p(x)$ 僅含 $x\sin\beta x$ (因 $\cos\beta x$ 可歸爲齊次解)

當 $f(x) = \sin\beta x$ ， $y_p(x)$ 僅含 $x\cos\beta x$ (因 $\sin\beta x$ 可歸爲齊次解)

4. $f(x) = (p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \Lambda + p_o)e^{\alpha x}\cos\beta x$ 或

$f(x) = (q_n x^n + q_{n-1}x^{n-1} + \Lambda + q_o)e^{\alpha x}\sin\beta x$

$p_n, p_{n-1}, \Lambda, p_o, q_n, q_{n-1}, \Lambda, q_o, \alpha, \beta$ 爲常數

此結合指數函數 $(e^{\alpha x})$ 、多項式 (x^n) 、三角函數 $(\cos\beta, \sin\beta)$ ，各類型按前述方法各自假設特解再結合即可。

(A)若齊次解中不包含 $e^{\alpha x}\sin\beta x$ 或 $e^{\alpha x}\cos\beta x$ ，令

$$y_p(x) = (A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \Lambda + A_0)e^{\alpha x}\cos\beta x + (B_n x^n + B_{n-1}x^{n-1} + \Lambda + B_0)e^{\alpha x}\sin\beta x$$

例題: (90 成大電機)

試求下列常微分方程式 $y'' + 5y' = xe^{-x}\sin 3x$

[解法]: $D^2 + 5D = 0$ $D = 0, D = -5$ $y_h(x) = c_1 + c_2 e^{-5x}$

因齊次解中不包含 $e^{-x}\sin 3x$ 或 $e^{-x}\cos 3x$ ，可令

$$y_p(x) = (A_1 x + A_0)e^{-x}\cos 3x + (B_1 x + B_0)e^{-x}\sin 3x$$

$$y_p'(x) = [(-A_1 + 3B_1)x + (A_1 - A_0 + 3B_0)]e^{-x}\cos 3x$$
$$+ [(-B_1 - 3A_1)x + (B_1 - B_0 - 3A_0)]e^{-x}\sin 3x$$

$$y_p''(x)=[(-8A_1-6B_1)x+(-2A_1-8A_0+6B_1-6B_0)]e^{-x}\cos 3x$$
$$+[(-8B_1+6A_1)x+(-2B_1-8B_0-6A_1+6A_0)]e^{-x}\sin 3x$$

將 $y_p(x)$ ， $y_p'(x)$ ， $y_p''(x)$ 帶回原 O.D.E.

$$[(-13A_1+9B_1)x+(3A_1-13A_0+6B_1+9B_0)]e^{-x}\cos 3x$$
$$+[(-13B_1-9A_1)x+(3B_1-13B_0-6A_1-9A_0)]e^{-x}\sin 3x=xe^{-x}\sin 3x$$

比較係數

$$\begin{cases} -13A_1+9B_1=0 \\ 3A_1-13A_0+6B_1+9B_0=0 \\ -13B_1-9A_1=1 \\ 3B_1-13B_0-6A_1-9A_0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1=-\dfrac{9}{250} \\ A_0=\dfrac{123}{6250} \\ B_1=-\dfrac{13}{250} \\ B_0=\dfrac{114}{6250} \end{cases}$$

$$y_p(x)=(-\frac{9}{250}x+\frac{123}{6250})e^{-x}\cos 3x+(-\frac{13}{250}x+\frac{114}{6250})e^{-x}\sin 3x$$

$$y(x)=c_1+c_2e^{-5x}+(-\frac{9}{250}x+\frac{123}{6250})e^{-x}\cos 3x+(-\frac{13}{250}x+\frac{114}{6250})e^{-x}\sin 3x$$

[另種 $y_p(x)$ 判定法]:

$$y''+5y'=xe^{-x}\sin 3x$$
$$D(D+5)y=xe^{-x}\sin 3x \qquad \text{----------------------(a)}$$

考慮讓上式成爲齊次 O.D.E.

$$D(D+5)[D-(-1+3i)]^2[D-(-1-3i)]^2y$$
$$=[D-(-1+3i)]^2[D-(-1-3i)]^2xe^{-x}\sin 3x=0 \qquad \text{---------------------(b)}$$

對 y 而言同時滿足(a)式及(b)式

由(a)式 $y(x)=c_1+c_2e^{-5x}+y_p(x)$ ----------------------(c)

由(b)式

$$y(x)=c_1+c_2e^{-5x}+A_0e^{-x}\cos 3x+B_0e^{-x}\sin 3x+A_1xe^{-x}\cos x+B_1xe^{-x}\sin x \text{ ----(d)}$$

比較(c)(d)兩式知，須令

$$y_p(x)=A_0e^{-x}\cos 3x+B_0e^{-x}\sin 3x+A_1xe^{-x}\cos x+B_1xe^{-x}\sin x$$

$$y_p(x)=(A_1x+A_0)e^{-x}\cos x+(B_1x+B_0)e^{-x}\sin x$$

[註]:若 $f(x)=p_0e^{\alpha x}\cos\beta x$ 或 $f(x)=q_0e^{\alpha x}\sin\beta x$，此為上述

$$f(x)=(p_nx^n+p_{n-1}x^{n-1}+\Lambda+p_o)e^{\alpha x}\cos\beta x \text{ 或}$$

$$f(x)=(q_nx^n+q_{n-1}x^{n-1}+\Lambda+q_o)e^{\alpha x}\sin\beta x$$

的特殊情況，令

$$y_p(x)=A_0e^{\alpha x}\cos\beta x+B_0e^{\alpha x}\sin\beta x$$

例題: (91 交大機械)

試求下列常微分方程式 $y''-y'+2y=e^x\sin x$

[解法]: $D^2-D+2=0$ ， $D=\dfrac{1\pm i\sqrt{7}}{2}$ ， $y_h(x)=e^{\frac{1}{2}x}(c_1\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x)$

因齊次解中不包含 $e^x\cos x$ 或 $e^x\sin x$，可令

$$y_p(x)=A_0e^x\cos x+B_0e^x\sin x$$

$$y_p'(x)=(A_0+B_0)e^x\cos x+(B_0-A_0)e^x\sin x$$

$$y_p''(x)=2B_0e^x\cos x-2A_0e^x\sin x$$

將 $y_p(x)$ ， $y_p'(x)$ ， $y_p''(x)$ 帶回原 O.D.E.

$$(A_0+B_0)e^x\cos x+(B_0-A_0)e^x\sin x=e^x\sin x$$

比較係數

$$\begin{cases}A_0+B_0=0\\ B_0-A_0=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A_0=-\dfrac{1}{2}\\ B_0=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$y_p(x)=-\frac{1}{2}e^x\cos x+\frac{1}{2}e^x\sin x$$

$$y(x)=e^{\frac{1}{2}x}(c_1\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x)-\frac{1}{2}e^x\cos x+\frac{1}{2}e^x\sin x$$

(B)若齊次解中包含 $e^{\alpha x}\sin\beta x$ 或 $e^{\alpha x}\cos\beta x$ ，令

$$y_p(x)=x(A_nx^n+A_{n-1}x^{n-1}+\Lambda+A_0)e^{\alpha x}\cos\beta x+x(B_nx^n+B_{n-1}x^{n-1}+\Lambda+B_0)e^{\alpha x}\sin\beta x$$

[註]:若 $f(x)=p_0e^{\alpha x}\cos\beta x$ 或 $f(x)=q_0e^{\alpha x}\sin\beta x$，此爲上述

$$f(x)=(p_nx^n+p_{n-1}x^{n-1}+\Lambda+p_o)e^{\alpha x}\cos\beta x \text{ 或}$$

$$f(x)=(q_nx^n+q_{n-1}x^{n-1}+\Lambda+q_o)e^{\alpha x}\sin\beta x$$

的特殊情況，令

$$y_p(x)=A_0xe^{\alpha x}\cos\beta x+B_0xe^{\alpha x}\sin\beta x$$

例題: (90 北科大自動化)

試求下列常微分方程式 $y''-2y'+2y=2e^x\cos x$

[解法]: $D^2-2D+2=0$ $D=1\pm i$ $y_h(x)=e^x(c_1\cos x+c_2\sin x)$

因齊次解中包含 $e^x\cos x$，可令

$$y_p(x)=A_0xe^x\cos x+B_0xe^x\sin x$$

$$y'_p(x)=[(A_0+B_0)x+A_0]e^x\cos x+[(B_0-A_0)x+B_0]e^x\sin x$$

$$y''_p(x)=[2B_0x+(2A_0+2B_0)]e^x\cos x+[-2A_0x+(2B_0-2A_0)]e^x\sin x$$

將 $y_p(x)$，$y'_p(x)$，$y''_p(x)$ 帶回原 O.D.E.

$$2B_0e^x\cos x-2A_0e^x\sin x=2e^x\cos x$$

比較係數

$$\begin{cases}2B_0=2\\-2A_0=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B_0=1\\A_0=0\end{cases}$$

$$y_p(x)=xe^x\sin x$$

$$y=e^x(c_1\cos x+c_2\sin x)+xe^x\sin x$$

本節習題:

試求下列微分方程式

1. $y''+9y=x\cos 3x$ (91 雲科大電機)

[ans]: $y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + \frac{1}{12}x^2 \sin 3x + \frac{1}{36}x \cos 3x$

2. $y'' - y' + 2y = e^x \sin 2x$ (91 交大機械)

[解答]: $y = e^{\frac{1}{2}x}(c_1 \cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + c_2 \sin\frac{\sqrt{7}}{2}x) + \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$

3. $y'' - y' + 2y = e^x \sin 2x \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$ (91 暨南電機)

[解答]: $y = e^{-x} + 2\sin x$

4. $y'' + 2y' - 35y = 12e^{5x} + 37\sin 5x$ (91 逢甲航空)

[解答]: $y = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-7x} - \frac{1}{10}\cos 5x - \frac{3}{5}\sin 5x$

5. $y''' + 4y = x\cos 2x$ (91 臺科大機械)

[解答] $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{x}{16}\cos 2x + \frac{1}{8}x^2 \sin 2x$

6. $y'' - 2y' + y = e^x + x$ (91 中山材料)

[解答]: $y = c_1 e^x + c_2 xe^x + \frac{1}{2}x^2 e^{4x} + x + 2$

7. $y'' + 2y' = 2x + 5 - e^{-2x}$ (91 東華材料)

[解答]: $y = c_1 + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

8. $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x - x + 16$ (91 暨南電機)

[解答]: $y = c_1 e^x + c_2 xe^x + c_3 x^2 e^x + \frac{1}{6}x^3 e^x + x - 13$

9. $y''' - y' = 25\cos 2x$ (91 台灣師大電機)

[解答]: $y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} - \frac{5}{2}\sin 2x$

10. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 2\cosh x$ (91 暨南電機)

[解答]: $y = c_1 e^x + c_2 xe^x + c_3 x^2 e^x + \frac{1}{6}x^3 e^x - \frac{1}{8}e^{-x}$

11. $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$ (90 **台大電機**)

[ans]: $y = c_1 e^{3x} + c_2 xe^{3x} + \frac{1}{2}x^2 e^{3x}$

12. $y'' - 2y' + y = 2e^x$ (90 **中興電機**)

[ans]: $y = c_1 e^x + c_2 xe^x + x^2 e^x$

13. $y'' - 2y' + 2y = 0$, $y(0) = -3$, $y(\frac{1}{2}\pi) = 0$ (90 **中正電機**)

[ans]: $y = -3e^t \cos t$

14. $y'' + 5y' = xe^{-x}\sin(3x)$. (90 **成大電機**)

[ans]: $y=c_1+c_2e^{-5x}-\frac{1}{250}e^{-x}[(13x-\frac{114}{25})\sin 3x+(9x+\frac{246}{50})\cos 3x]$

15. $y'''-y''-8y'+12y=7e^{2x}$. (90 台科大電機)

[ans]: y= $c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+c_3e^{-3x}+\frac{7}{10}x^2e^{2x}$

16. $y''+3y'=28\cosh 4x$ (90 彰師大電機)

[ans]:y= $c_1+c_2e^{-3x}+\frac{1}{2}e^{4x}+\frac{7}{2}e^{-4x}$

17. $y''-2y''+y=5xe^x+3x$ (90 中原電機)

[ans]:y= $c_1e^x+c_2xe^x+\frac{5}{6}x^3e^x+3x+6$

18. $y''(x)+y'(x)-2y(x)=0$, $y(0)=4$, $y'(0)=-5$. (90 淡江電機)

[ans]: $y=e^x+3e^{-2x}$

19. $y''+y=xe^x$. (90 交大電控,光電)

[ans]: $y=c_1\cos x+c_2\sin x+\frac{1}{2}(x-1)e^x$

20. $y''+4y'+4y=4x^2+6e^x$ (90 北科大電腦通訊丙)

[ans]: $y=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}+x^2-2x+\frac{3}{2}+\frac{2}{3}e^x$

21. $y''-2y'+5y=2e^x\cos 2x$. (90 中原機械)

[ans]: $y=c_1e^x\cos 2x+c_2e^x\sin 2x+\frac{1}{2}xe^x\sin 2x$

22. $y''+2y'=4t^2$, $y(0)=1$, $y'(0)=-1$ (90 交大土木,丙)

[ans]: $y=e^{-2t}+\frac{2}{3}t^3-t^2+t$

23. $\frac{d^2y}{dx^2}+y=x\sin x$ (90 成大土木,乙)

[ans]: $y=c_1\cos x+c_2\sin x+\frac{1}{4}x\sin x-\frac{1}{4}x^2\cos x$

24. $y^{(4)}-10y''+9y=x^2+1$, $(x\geq 0)$ (90 屏科大機械,土木,環工)

[ans]: $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3e^{3x}+c_4e^{-3x}+\frac{x^2}{9}+\frac{29}{81}$

25. $y''+2y'+2y=e^{-x}\cos x$ (90 逢甲土木)

[ans]: $y=c_1e^{-x}\cos x+c_2e^{-x}\sin x+\frac{x}{2}\sin x\cdot e^{-x}$

26. $y'''-3y''-y'+3y=x^2$ (90 台大農機)

[ans] $y=c_1e^{x}+c_2e^{3x}+c_3e^{-x}+\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{9}x+\frac{20}{27}$

27. $y''+4y=\cos 2x$ (90 台大農機)

[ans] $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+\frac{x}{4}\sin 2x$

28. $\frac{d^3y}{dx^3}-4\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+6y=(e^{-2x}-2)^2$ (90 清大動機)

[ans]: $y=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}+c_3e^{3x}+\frac{1}{5}e^{-2x}+\frac{2}{3}-\frac{1}{126}e^{-4x}$

29. $y''-2y'+y=e^{x}$, $y(1)=1$, $y(-1)=1$ (90 成大航太)

[ans]: $y=\frac{1}{2}\left(e^{-1}-\frac{1}{2}+e-\frac{1}{2}e^2\right)e^{x}+\frac{1}{2}\left(e^{-1}-\frac{1}{2}-e+\frac{1}{2}e^2\right)xe^{x}+\frac{1}{2}x^2e^{x}$

30. $4y''+4y'+65y=64e^{x/2}+65x-4$, $y(0)=1$, $y'(0)=5.5$ (90 淡江航太)

[ans]: $y=e^{\frac{1}{2}x^2}\sin 4x+e^{\frac{1}{2}x}+x$

31. (a) $y''+y'=4xe^{x}+3\sin x$ (b) $y''-2y'+y=x^2e^{x}$ (90 成大工科)

[ans]: $(a)\,y=c_1+c_2e^{-x}-3e^{x}+2xe^{x}-\frac{3}{2}\sin x-\frac{3}{2}\cos x$

$(b)\,y=c_1e^{x}+c_2xe^{x}+\frac{1}{12}x^4e^{x}$

32. $\frac{d^4y}{dx^4}+\frac{d^2y}{dx^2}=3x^2+4\sin x-2\cos x$ (90 中興化工)

[ans]: $y=c_1+c_2x+c_3\cos x+c_4\sin x+\frac{1}{4}x^4+2x\cos x+x\sin x-3x^2$

33. $y''+5y'+6y=3e^{-2x}+e^{3x}$. (90 北科大化工)

[ans]: $y=c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}+3xe^{-2x}+\frac{1}{30}e^{3x}$

34.(a) $y''+6y'+9y=0$, $y(0)=-4$, $y'(0)=14$ (90 中山材料,乙)

(b) $\ddot{y}+2\dot{y}+2y=3.5\sin 3t-3\cos 3t$. $y(0)=0$, $\dot{y}(0)=-0.5$

[ans]: $(a)\ y=-4e^{-3x}+2xe^{-3x}$ $(b)\ y=c_1e^{-t}\cos t+c_2e^{-t}\sin t-\frac{1}{2}\sin 3t$

35. $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y=x^2\sin 2x$. (90 中山材料)

[ans]:

$$y=c_1e^{x}+c_2xe^{x}-\left(\frac{3}{25}x^2+\frac{44}{125}x+\frac{1166}{15625}\right)\sin 2x+\left(\frac{4}{25}x^2-\frac{8}{125}x-\frac{4712}{15625}\right)\cos 2x$$

36. $y''+4y'+4y=2x+3xe^{-2x}+6$ (90 中央環工)

[ans]: $y=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}+\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1}{2}x^3e^{-2x}$

37. $y''-4y=e^{2x}-1$ (90 雲科大環安)

[ans]: $y=c_1e^{-2x}+c_2e^{2x}+\frac{1}{4}xe^{2x}+\frac{1}{4}$

38. $\frac{d^4y}{dx^4}+2\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ (90 中央太空)

[ans]: $y=(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x$

39. $y''+2y'+y=-3e^{-x}+8xe^{-x}+1$ (90 中原醫工乙)

[ans]: $y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}-\frac{3}{2}x^2e^{-x}+\frac{4}{3}x^3e^{-x}+1$