

第三章 拉氏轉換

在前面二章中，我們介紹了以微積分方式處理常微分方程式，讀者一定發現，我們所學過的方法相當多，針對不同形式的 O.D.E. 常有一些特定的方法，而且在找出 O.D.E. 的解後，仍須搭配初值條件把解中的待定係數求出，此時才算大功告成。在本章中我們所介紹的拉氏轉換（Laplace Transformation）將把 O.D.E. 所搭配的初值問題轉換成簡單的代數問題，因此簡化上述較為繁瑣的步驟，尤其在針對常係數常微分方程式中，當強制函數 t^n ， e^{at} ， $\sin at$ ， $\cos at$ 等基礎函數組合成不連續函數形式時，拉氏轉換實為絕佳處理 O.D.E. 的一套工具。

3-1. 拉氏轉換的定義與存在充分條件

首先我們先定義出在本章中所須用到的一些專有名詞，以利後面章節的介紹

定義：

若且唯若 $\lim_{t \rightarrow c^-} f(t)$ 與 $\lim_{t \rightarrow c^+} f(t)$ 存在且相等，則稱 $\lim_{t \rightarrow c} f(t)$ 存

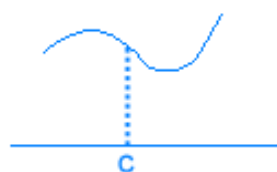
在，即 $\lim_{t \rightarrow c^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow c^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow c} f(t)$

定義：

若且唯若 $\lim_{t \rightarrow c} f(t) = f(c)$ ，即

$$\lim_{t \rightarrow c^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow c^+} f(t) = f(c)$$

則稱 $f(t)$ 在 $t = c$ 處為連續

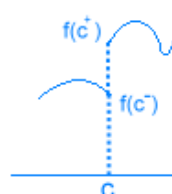


定義：

若 $\lim_{t \rightarrow c^-} f(t)$ 與 $\lim_{t \rightarrow c^+} f(t)$ 存在但不相等，

則稱 $t = c$ 為 $f(t)$ 的一個跳躍不連續點，

此時的跳躍值為 $f(c^+) - f(c^-)$

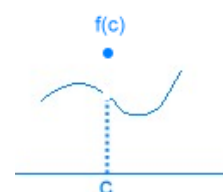


定義：

若且唯若 $\lim_{t \rightarrow c^-} f(t)$ 與 $\lim_{t \rightarrow c^+} f(t)$ 存在且相等，

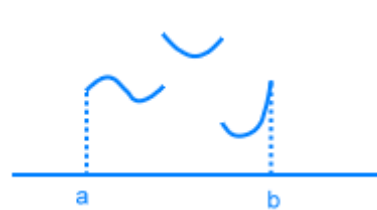
但 $\lim_{t \rightarrow c^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow c^+} f(t) \neq f(c)$ ，則稱 $t = c$ 為 $f(t)$

的一個可去不連續點(removable discontinuity)。



定義：

在 t 在 (a, b) 間具有有限個跳躍不連續點
或可去不連續點，其餘在 $t \in (a, b)$ 內為連續
函數，且 $\lim_{t \rightarrow a^+} f(t)$ 及 $\lim_{t \rightarrow b^-} f(t)$ 均存在，則
稱 $f(t)$ 在 $t \in (a, b)$ 內為分段連續函數
(piecewise continuous function)。



由上述定義，若函數 $f(t)$ 在 $t \in (a, b)$ 內為分段連續函數，則 $|f(t)| \leq M$ ，
必有上界。

定義：

若存在常數 α 及正數 $M > 0, T > 0$ ，使得在 $t \geq T$ 時
 $|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$ ，則稱函數 $f(t)$ 為具 α 階的指數階函數。

一般在判定 $f(t)$ 是否為具 α 階的指數階函數，可用下面方式判定

若 $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\alpha t} f(t)$ 存在且有界，則稱 $f(t)$ 為具 α 階的指數階函數。

例如

$$f(t) = \sin at \text{ 或 } f(t) = \cos at \quad t \in (T, \infty)$$

$\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} \sin at$ 不存在 $\therefore f(t)$ 非零階指數階函數

$$\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} \sin at \rightarrow 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} \cos at \rightarrow 0$$

$\therefore f(t) = \sin at$ 及 $f(t) = \cos at$ 為一階指數階函數

例如

$$f(t) = e^{at} \quad t \in (T, \infty)$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\alpha t} e^{at} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(\alpha-a)t} \rightarrow 0 \quad (\alpha > a)$$

$\therefore f(t) = e^{at}$ 在 $\alpha > a$ 時為 α 階指數階函數

例如

$$f(t) = t^n \quad t \in (T, \infty)$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\alpha t} t^n \rightarrow 0$$

$\therefore f(t) = t^n$ 為 α 階指數階函數

例如

$$f(t) = t^t \quad t \in (T, \infty)$$

$$\because \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\alpha t} t^t = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\alpha t} e^{\ln t^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(\alpha - \ln t)t} \rightarrow \infty$$

$\therefore f(t) = t^t$ 非指數階函數

例題： (台大機械)

若欲 $L\{1 - e^{-2t}\}$ 收斂，試問 s 值範圍為何？

$$[\text{解法}] : L\{1 - e^{-2t}\} = \int_0^{\infty} e^{-st} (1 - e^{-2t}) dt = \int_0^{\infty} [e^{-st} - s^{-(s+2)}] dt$$

$$\text{上式欲收斂} \quad s > 0 \quad \text{且} \quad s + 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad s > 0$$

所以當 $s > 0$ 時， $L\{1 - e^{-2t}\}$ 才收斂。

經由前面一些定義，我們開始來介紹拉氏轉換

定義：

函數 $f(t)$ 為 $t \geq 0$ 上有定義的函數，則

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

稱為 $f(t)$ 的拉氏轉換 (Laplace transformation)，式中的 s 值須使 $e^{-st} f(t)$ 在 $(0, \infty)$ 內的瑕積分收斂。

反過來表示， $f(t)$ 稱為 $F(s)$ 的逆拉氏轉換

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{st} F(s) ds = \sum_{\text{All poles}} \text{Res}[e^{tz} F(z)]$$

式中 $F(s)$ 的所有奇點須位於 $t = a$ 的左側 (此為複變理論內容)。

例題： (89 交大光電)

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & t \geq 0, t \neq 1 \\ 1 & t = 1 \end{cases} \quad g(t) = \begin{cases} t^2 & t \geq 0, t \neq 1 \\ 2 & t = 1 \end{cases}$$

則 $f(t)$ 與 $g(t)$ 是否具有相同拉式轉換？

$$[\text{解法}] : F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{1^-} e^{-st} t^2 dt + \int_{1^-}^{1^+} e^{-st} 1 dt + \int_{1^+}^{\infty} e^{-st} t^2 dt$$

$$= \int_0^{1^-} e^{-st} t^2 dt + \int_{1^+}^{\infty} e^{-st} t^2 dt = \frac{2}{s^3}$$

$$G(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} g(t) dt = \int_0^{1^-} e^{-st} t^2 dt + \int_{1^-}^{1^+} e^{-st} 2 dt + \int_{1^+}^{\infty} e^{-st} t^2 dt$$

$$= \int_0^{1^-} e^{-st} t^2 dt + \int_{1^+}^{\infty} e^{-st} t^2 dt = \frac{2}{s^3}$$

$$\therefore F(s) = G(s)$$

以下為常見初等函數的拉氏轉換，此亦為待定係數法中強制函數 $f(t)$ 之型式，因此在常係數 O.D.E. 中，若已知初值條件，建議以拉氏轉換來解 O.D.E. 較易處理。

$$(A) f(t) = 1$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot 1 dt = \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{s} \quad (s > 0)$$

例如： $f(t) = 5$ $F(s) = \frac{5}{s}$

$$F(s) = \frac{9}{s} \quad f(t) = 9$$

$$(B) f(t) = t^n$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} t^n dt = t^n \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{-s} n t^{n-1} dt = \frac{n}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} t^{n-1} dt$$

$$= \wedge \wedge \wedge \quad (\text{繼續利用部分積分法})$$

$$= \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} \quad (s > 0)$$

式中 $\Gamma()$ 稱為 Gamma 函數。

$$\therefore F(s) = \begin{cases} \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} & n \neq \text{整數} \\ \frac{n!}{s^{n+1}} & n = \text{整數} \end{cases} \quad (s > 0)$$

例如： $L\{t^2\} = \frac{2!}{s^3} = \frac{2}{s^3}$ $L\{t^{\frac{1}{2}}\} = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{s^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$

$$L\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{1}{2}}} \quad L^{-1}\left\{\frac{5}{3!s^4}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{5 \cdot 3!}{3!s^4}\right\} = \frac{5}{6} t^3$$

例題： (86 成大機械)

$$\text{試求 } \int_0^{\infty} \sin x^2 dx \text{ 及 } \int_0^{\infty} \cos x^2 dx$$

[解法]：令 $t = x^2$ $x = \sqrt{t}$ $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$

$$\text{則 } \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \sin t \frac{1}{\sqrt{t}} dt \quad \int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \cos t \frac{1}{\sqrt{t}} dt$$

$$\therefore \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-it} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \sin t \frac{1}{\sqrt{t}} dt - i \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \cos t \frac{1}{\sqrt{t}} dt$$

$$\begin{aligned} \text{且 } \int_0^{\infty} e^{-it} \frac{1}{\sqrt{t}} dt &= L \left\{ \frac{1}{\sqrt{t}} \right\} \bigg|_{s \rightarrow i} = \frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{1}{2}}} \bigg|_{s \rightarrow i} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{i}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{e^{i(\frac{\pi}{2})}}} = \sqrt{\pi} e^{-i(\frac{\pi}{4})} \\ &= \sqrt{\pi} [\cos(\frac{\pi}{4}) - i \sin(\frac{\pi}{4})] = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} (1-i) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-it} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} (1-i) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} (1-i) = \int_0^{\infty} \sin x^2 dx - i \int_0^{\infty} \cos x^2 dx$$

$$\therefore \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

[解法]：令 $t = x^2 \quad x = \sqrt{t} \quad dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$

$$\text{則 } \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \sin t \frac{1}{\sqrt{t}} dt \quad \int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \cos t \frac{1}{\sqrt{t}} dt$$

$$\therefore \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-it} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \sin t \frac{1}{\sqrt{t}} dt - i \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \cos t \frac{1}{\sqrt{t}} dt$$

$$\text{且 } \int_0^{\infty} e^{-it} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \int t^{\frac{1}{2}-1} e^{-it} dt = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{(i)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{(e^{i(\frac{\pi}{2})})^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\pi} e^{-i(\frac{\pi}{4})}$$

$$= \sqrt{\pi} [\cos(\frac{\pi}{4}) - i \sin(\frac{\pi}{4})] = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} (1-i)$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-it} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} (1-i) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} (1-i) = \int_0^{\infty} \sin x^2 dx - i \int_0^{\infty} \cos x^2 dx$$

$$\therefore \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

[註]：此題在複變函數及誤差函數中仍有不同的處理方法

$$(C) f(t) = e^{at}$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot e^{at} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{s-a} \quad (s > a)$$

$$\text{例如: } L\{e^{3t}\} = \frac{1}{s-3} \quad L^{-1}\left\{\frac{4}{s-6}\right\} = 4e^{6t}$$

例題: (87 中原電機)

試求 $L\{c^t\}$ c 為常數

[解法] : $L\{c^t\} = L\{e^{t \ln c}\} = L\{e^{t \ln c}\} = \frac{1}{s - \ln c}$

(D) $f(t) = \sin at$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \sin at dt = \int_0^\infty e^{-st} I_m \{e^{iat}\} dt = I_m \left\{ \int_0^\infty e^{-st} e^{iat} dt \right\} = I_m \left\{ \frac{1}{s - ia} \right\}$$

$$= I_m \left\{ \frac{s + ia}{s^2 + a^2} \right\} = \frac{a}{s^2 + a^2} \quad (s > 0)$$

例如: $L\{\sin 5t\} = \frac{5}{s^2 + 5^2} = \frac{5}{s^2 + 25}$ $L^{-1}\left\{\frac{6}{s^2 + 9}\right\} = L^{-1}\left\{2 \cdot \frac{3}{s^2 + 3^2}\right\} = 2 \sin 3t$

(E) $f(t) = \cos at$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cos at dt = \int_0^\infty e^{-st} \operatorname{Re}\{e^{iat}\} dt = \operatorname{Re}\left\{\int_0^\infty e^{-st} e^{iat} dt\right\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{s - ia}\right\}$$

$$= \operatorname{Re}\left\{\frac{s + ia}{s^2 + a^2}\right\} = \frac{s}{s^2 + a^2} \quad (s > 0)$$

例如: $L\{\cos 6t\} = \frac{s}{s^2 + 6^2} = \frac{s}{s^2 + 36}$ $L^{-1}\left\{\frac{7s}{s^2 + 9}\right\} = L^{-1}\left\{7 \cdot \frac{s}{s^2 + 3^2}\right\} = 7 \cos 3t$

例題： (88 中央電機)

$f(t) = \sin(at + b)$ 試求 $F(s)$

[解法] : $f(t) = \sin(at + b) = \sin at \cos b + \cos at \sin b$

$$F(s) = \frac{a \cos b}{s^2 + a^2} + \frac{(\sin b)s}{s^2 + a^2}$$

例題： (91 交大機械)

Perform the Laplace transform on the following time function $f(t)$, and also apply the result to calculate the integral I .

$$f(t) = \int_0^\infty \frac{\cos xt}{1 + x^2} dx \quad I = \int_0^\infty \frac{\cos x}{1 + x^2} dx$$

[解法] : $L\left\{\int_0^\infty \frac{\cos xt}{1 + x^2} dx\right\} = \int_0^\infty \frac{1}{1 + x^2} \frac{s}{s^2 + x^2} dx = \frac{s}{s^2 - 1} \int_0^\infty \left(\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{s^2 + x^2}\right) dx$

$$L\left\{\int_0^\infty \frac{\cos xt}{1 + x^2} dx\right\} = \frac{s}{s^2 - 1} \left(\tan^{-1} x - \frac{1}{s} \tan^{-1} \frac{x}{s}\right) \Big|_0^\infty = \frac{s\pi}{2(s^2 - 1)} \left(1 - \frac{1}{s}\right) = \frac{\pi}{2(s + 1)}$$

$$f(t) = \int_0^\infty \frac{\cos xt}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-t}$$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = f(1) = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-1}$$

$$(F) \quad f(t) = \sinh at$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \sinh at dt = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{e^{at} - e^{-at}}{2} dt = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a} \right) = \frac{a}{s^2 - a^2} \quad (s > -a)$$

$$\text{例如: } L\{\sinh 2t\} = \frac{2}{s^2 - 2^2} = \frac{2}{s^2 - 4}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{12}{s^2 - 9}\right\} = L^{-1}\left\{4 \cdot \frac{3}{s^2 - 3^2}\right\} = 4 \sinh 3t$$

$$(G) \quad f(t) = \cosh at$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cosh at dt = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{e^{at} + e^{-at}}{2} dt = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \right) = \frac{s}{s^2 - a^2} \quad (s > -a)$$

$$\text{例如: } L\{\cosh 7t\} = \frac{2}{s^2 - 7^2} = \frac{2}{s^2 - 49}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{4s}{s^2 - 9}\right\} = L^{-1}\left\{4 \cdot \frac{s}{s^2 - 3^2}\right\} = 4 \cosh 3t$$

定理：拉氏轉換存在的充份條件

若函數 $f(t)$ 在 $(0, \infty)$ 內為分段連續函數且 $t > T$ 時為 α 階指數階函數，則對 $s > \alpha$ 而言， $f(t)$ 的拉式轉換 $F(s)$ 必存在。

[證明]： $\because f(t)$ 為分段連續函數 $|f(t)| \leq M_1$

$\because f(t)$ 為指數階函數 $|f(t)| \leq M_2 e^{\alpha t}$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$$|F(s)| = \left| \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right| \leq \left| \int_0^T e^{-st} f(t) dt \right| + \left| \int_T^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right|$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^T e^{-st} |f(t)| dt + \int_T^{\infty} e^{-st} |f(t)| dt \leq \int_0^T e^{-st} M_1 dt + \int_T^{\infty} e^{-st} M_2 e^{\alpha t} dt \\ &= \frac{M_1(1 - e^{-sT})}{s} + \frac{M_2 e^{-(s-\alpha)T}}{s - \alpha} \end{aligned}$$

上式表示 $|F(s)|$ 存在，則 $F(s)$ 必存在。

上述定理為拉氏轉換存在的充分條件，即只要滿足分段連續函數及 α 階指數階函數的 $f(t)$ ，則 $f(t)$ 的拉氏轉換 $F(s)$ 必存在。但不滿足上述條件者，並不表示 $f(t)$ 的拉氏轉換 $F(s)$ 不存在。

例如： $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \quad \because \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{t}}$ 不存在，在 $t \in (0, \infty)$ 內非分段連續函數

$$\text{但 } L\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{1}{2}}} \text{ 存在}$$

例如： $f(t) = \ln t \quad \because \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln t$ 不存在，在 $t \in (0, \infty)$ 內非分段連續函數

$$\text{但 } L\{\ln t\} = \frac{\left. \frac{d\Gamma(n)}{dn} \right|_{n=1} - \ln s}{s} \text{ 存在}$$

定理：(91 交大光電)

若函數 $f(t)$ 在 $(0, \infty)$ 內為分段連續函數且 $t > T$ 時為 α 階指數階函數， $F(s)$ 為 $f(t)$ 的拉氏轉換，則 $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$

[證明]： $\because f(t)$ 為分段連續函數 $|f(t)| \leq M_1$

$\because f(t)$ 為指數階函數 $|f(t)| \leq M_2 e^{\alpha t}$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$$|F(s)| = \left| \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right| \leq \left| \int_0^T e^{-st} f(t) dt \right| + \left| \int_T^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right|$$

$$\leq \int_0^T e^{-st} |f(t)| dt + \int_T^{\infty} e^{-st} |f(t)| dt \leq \int_0^T e^{-st} M_1 dt + \int_T^{\infty} e^{-st} M_2 e^{\alpha t} dt$$

$$= \frac{M_1(1 - e^{-sT})}{s} + \frac{M_2 e^{-(s-\alpha)T}}{s - \alpha}$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} |F(s)| \leq \lim_{s \rightarrow \infty} \left[\frac{M_1(1 - e^{-sT})}{s} + \frac{M_2 e^{-(s-\alpha)T}}{s - \alpha} \right] \rightarrow 0$$

$$\therefore \lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$$

上述定理可反過來看，若 $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) \neq 0$ ，則 $f(t)$ 在 $(0, \infty)$ 內不為分段連續函數或 α 階

指數階函數。

例如： $F(s) = 5 \quad f(t) = 5\delta(t)$

$\because \lim_{s \rightarrow \infty} F(s) \neq 0$ ，則 $f(t)$ 在 $(0, \infty)$ 內不為分段連續函數。

[註]：初值定理證明會用到此性質