Chapter 1

應力

簡介

- 材料力學 (mechanics of materials) 是力學的一支，是探討一固體在外加載重作用下，內部的應力與應變效應。
- 材料力學的起源可追溯自十七世紀初，伽利略 (Galileo) 對各種材料進行載重於桿與樑效應的試驗研究。

外部載重

- 只有兩種形式的外部載重作用於物體上，即表面力與物體力。

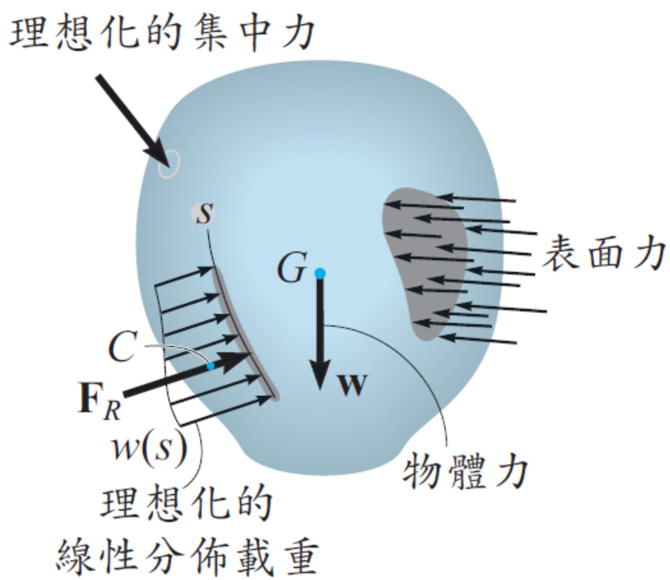


圖 1-1

- 表面力 (surface force) 是由一物體直接接觸於另一物體所造成。
- 若表面載重沿帶狀面積施加，則載重可理想化為線性分佈載重 (linear distributed load) $w(s)$。
- **$w(s)$的合力$\mathbf{F}_R$，等於分佈載重曲線下的面積，而這項合力作用於該面積的幾何中心或形心C。**
- 當某物體對另一物體施加一力，而物體間並無實際直接接觸，此作用力稱為物體力 (body force)。

許多機器零件為銷連結，以便能在接點上發生自由旋轉。這種支撐對桿件產生作用力而無力矩。

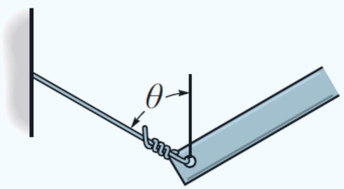
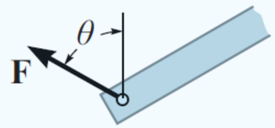
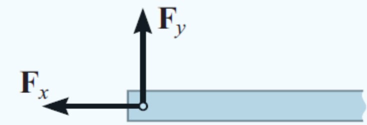
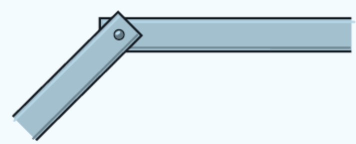
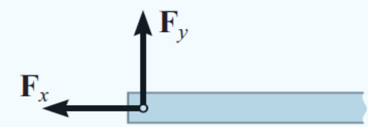
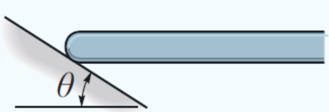
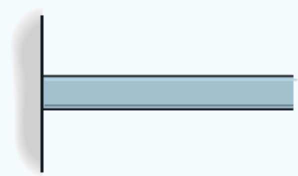
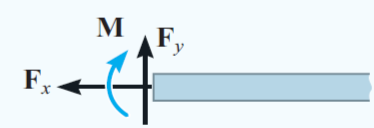
支撐反作用力

- 作用於支撐或物體間接觸點之表面力稱為反作用力(reactions)。
- **一般的規則是，若支撐防止某方向移動，則桿件在該方向上必有一力產生。同樣地，如果防止旋轉，則桿件必定有偶矩施加。**
- 一物體的平衡需要力之平衡 (balance of forces) 與力矩之平衡 (balance of moments)，用數學以兩向量方程式表示

$$\begin{aligned} \Sigma \mathbf{F} &= \mathbf{0} \\ \Sigma \mathbf{M}_O &= \mathbf{0} \end{aligned} \qquad (1\text{-}1)$$

此處$\Sigma\mathbf{F}$為作用在物體上所有力的合力，$\Sigma\mathbf{M}_O$則為所有力對物體上或物體外任一點O所產生之力矩和。

表 1.1

接點種類	反作用力	接點種類	反作用力
 纜繩	 一項未知：F	 外接銷	 二項未知：F_x, F_y
 滾輪	 一項未知：F	 內接銷	 二項未知：F_x, F_y
 平滑支撐	 一項未知：F	 固定支撐	 三項未知：F_x, F_y, M

為設計此建築物構架的桿件，首先須求出沿各桿件長度方向不同點的內部載重。

- 若在某一情況，力作用是位於*x*-*y*平面上，則物體平衡條件可僅以三純量方程式表示，即

$$\boxed{\begin{aligned}\Sigma F_x &= 0\\ \Sigma F_y &= 0\\ \Sigma M_O &= 0\end{aligned}} \qquad (1\text{-}3)$$

此處是所有對*O*點力矩的總和，所以方向沿 *z* 軸。

- 平衡方程式**最好的方法是將所有的力畫在自由體圖上**。

內部合載重

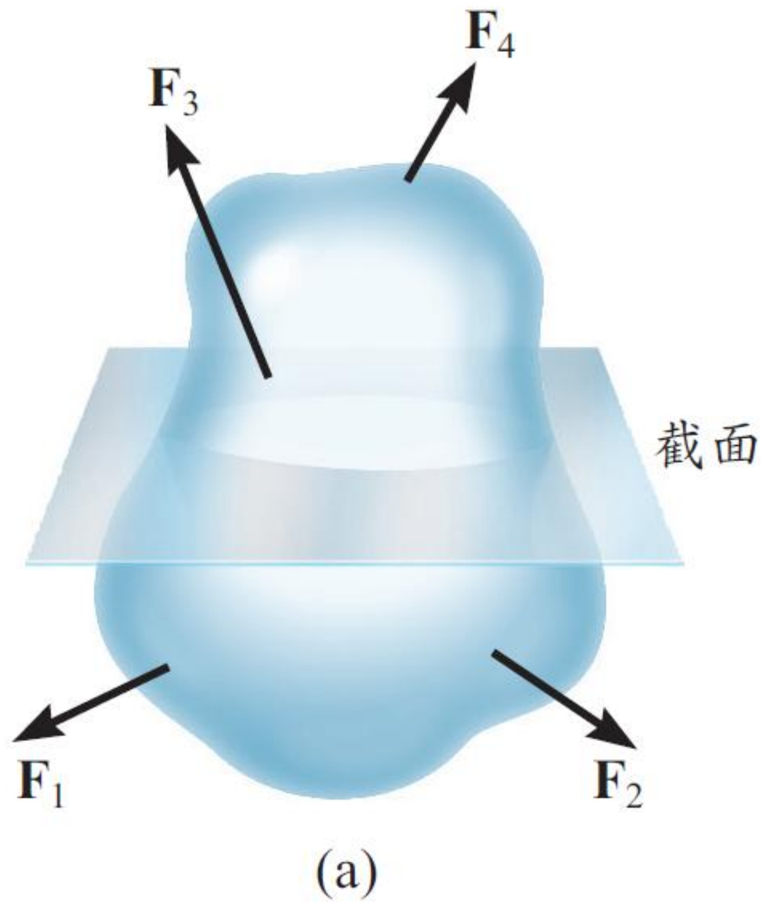


圖 1-2

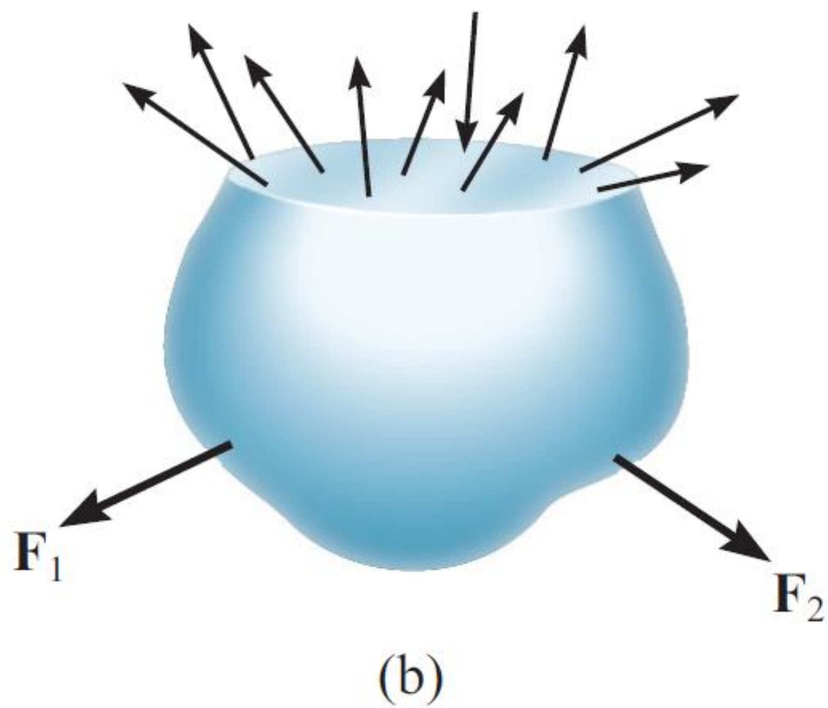
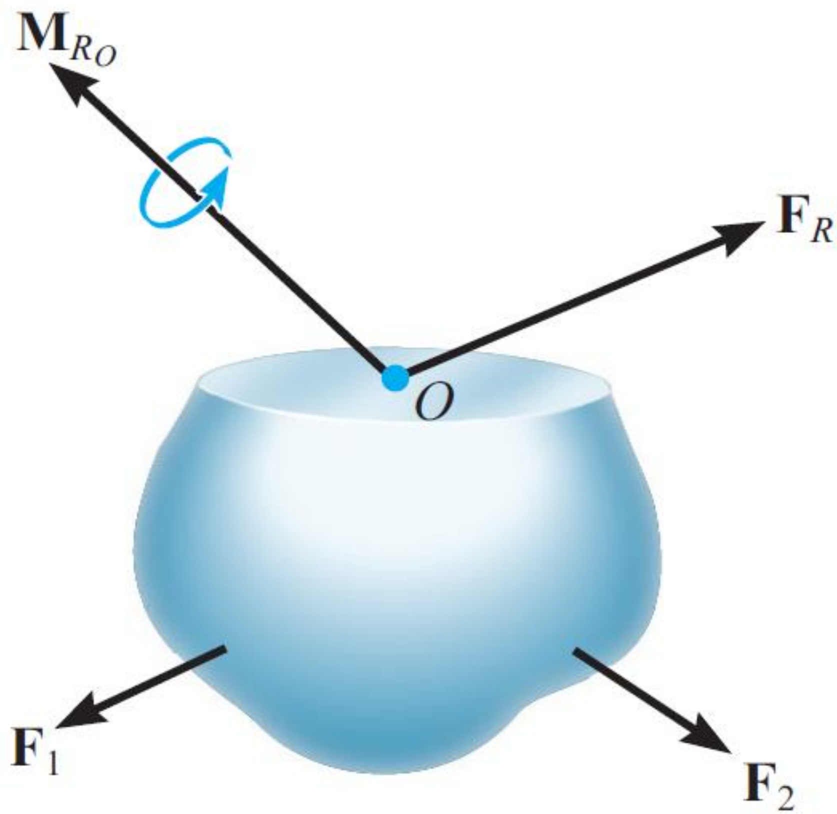


圖 1-2



(c)

圖 1-2

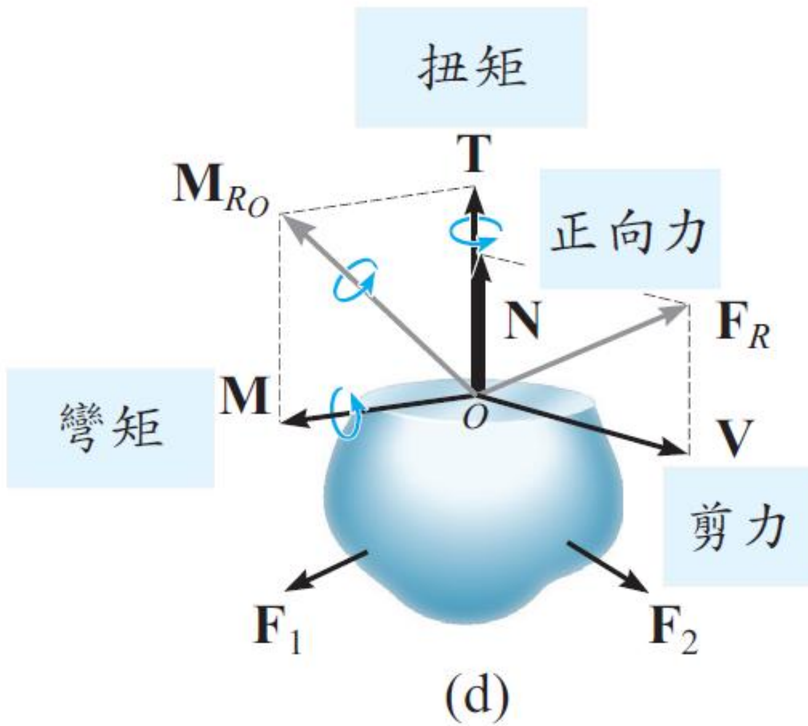


圖 1-2

四種不同形式之合載重定義

- **正向力N**：此力作用於截面垂直方向。只要外加載重有把物體兩部分推開或拉近的趨向時，就產生此正向力。
- **剪力V**：此力作用於截面平面上，當外加載重有導致物體兩部分相互滑動的趨向時，則產生此剪力。
- **扭矩T**：當外加載重有導致物體某部分相對於另一部分扭轉的趨向時，則將產生此種效應。
- **彎矩M**：彎矩的發生是由於外加載重使物體繞著截面上某一軸而產生彎曲之趨向。

同平面載重

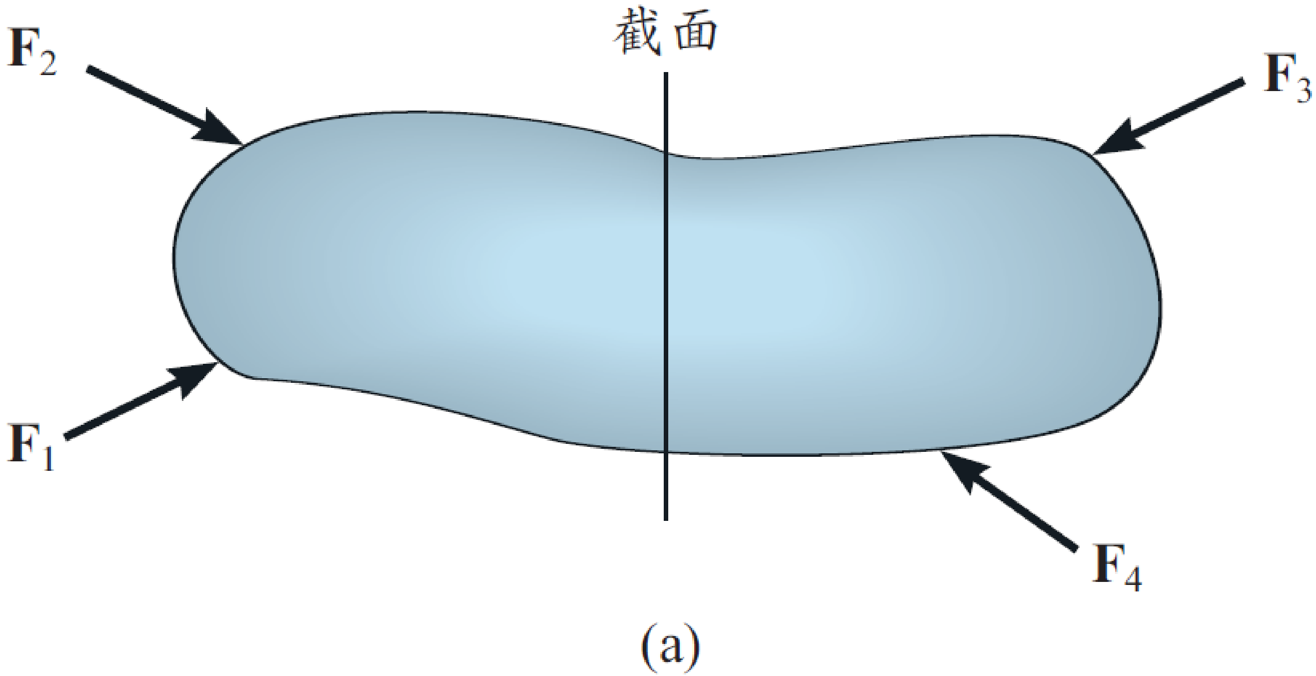
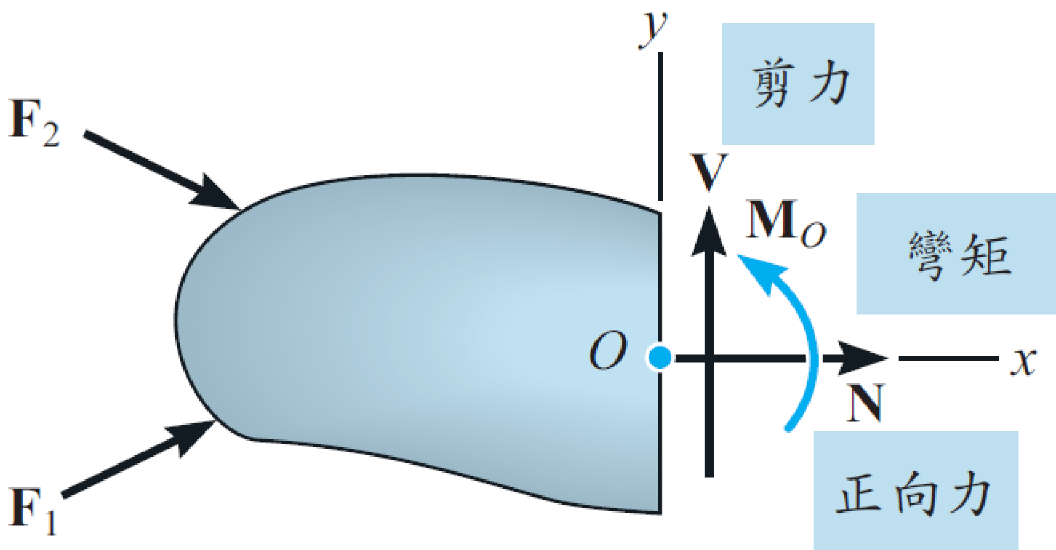


圖 1-3



(b)

圖 1-3

例題1-1

求作用在圖 1-4a 樑上 C 點橫截面之內部合載重。

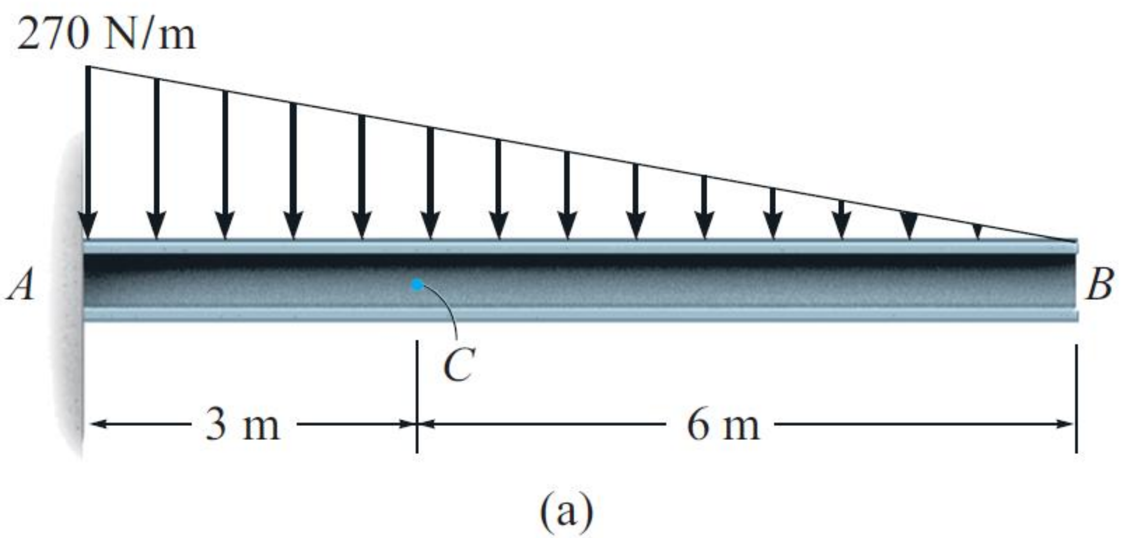


圖 1-4

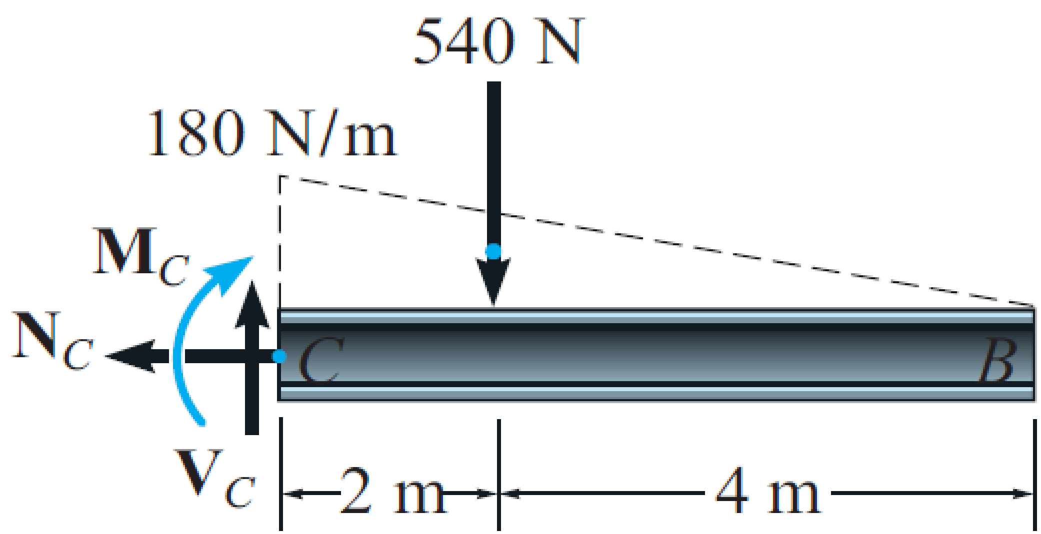
例題1-1(續)

解

支撐反作用力　支撐反作用，若考慮 CB 段，則 A 支撐反作用力不必求。

自由體圖　CB 段的自由體圖示於圖 1-4b，保持桿段上的分佈載重直到切開截面。然後用一合力取代這項載重。注意 C 點分佈載重的強度可依比例求出，即由圖 1-4a，$w/6\,\text{m} = (270\,\text{N/m})/9\,\text{m}$，$w = 180\,\text{N/m}$。分佈載重的大小等於載重曲線下的面積(三角形)，並作用於面積的形心上。故$F = \dfrac{1}{2}(180\,\text{N/m})(6\,\text{m}) = 540\,\text{N}$，作用點 C 離圖 1-4b 所示的 $\dfrac{1}{3}(6\,\text{m}) = 2\,\text{m}$。

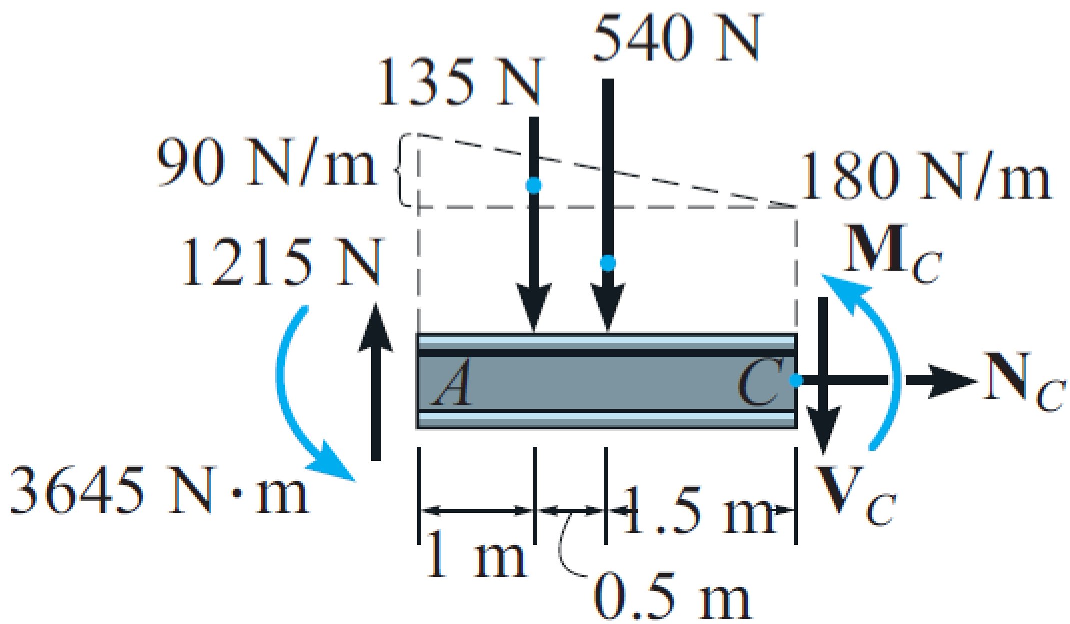
例題1-1(續)



(b)

圖 1-4

例題1-1(續)


540 N
135 N
90 N/m
180 N/m
1215 N
$\mathbf{M}_C$
A
C
$\mathbf{N}_C$
3645 N·m
$\mathbf{V}_C$
1 m
1.5 m
0.5 m

(c)

圖 1-4

例題1-1(續)

平衡方程式　應用平衡方程式可得

$\overset{+}{\rightarrow}\ \Sigma F_x = 0$；　$-N_C = 0$

$$N_C = 0$$ ■

$+\uparrow\ \Sigma F_y = 0$；　$V_C - 540\,\text{N} = 0$

$$V_C = 540\,\text{N}$$ ■

$\curvearrowleft + \Sigma M_C = 0$；　$-M_C - 540\,\text{N}(2\,\text{m}) = 0$

$$M_C = -1080\,\text{N}\cdot\text{m}$$ ■

例題1-2

求作用在圖 1-5a 機器軸上 C 點橫截面之內部合載重。此軸在 A、B 處以軸承支撐，兩軸承僅對軸產生垂直作用力。

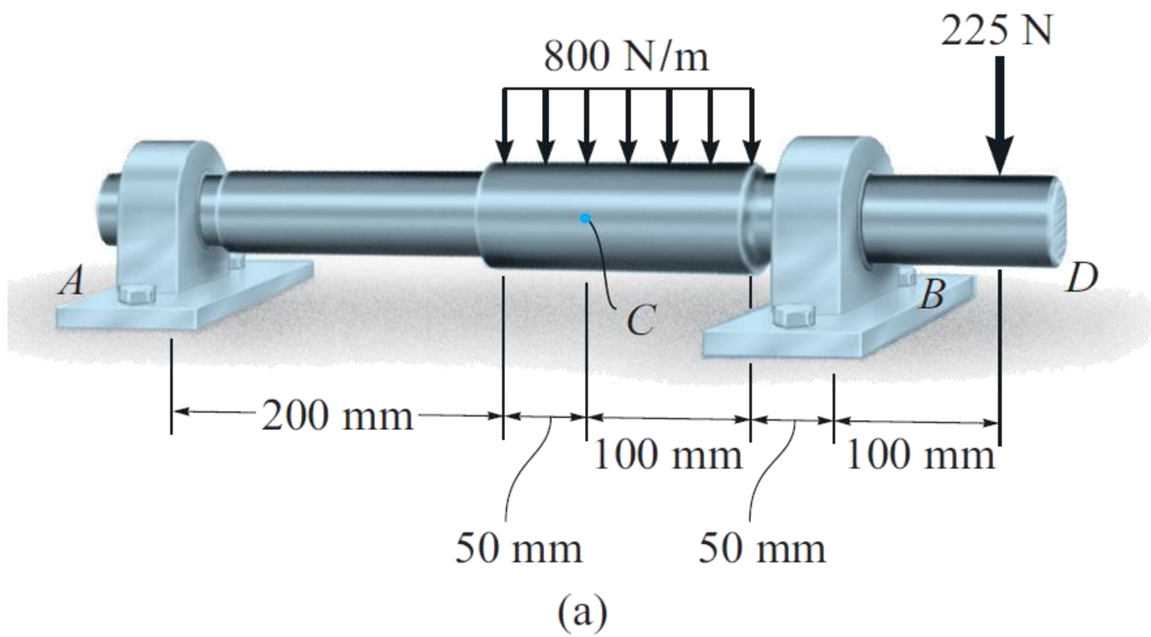
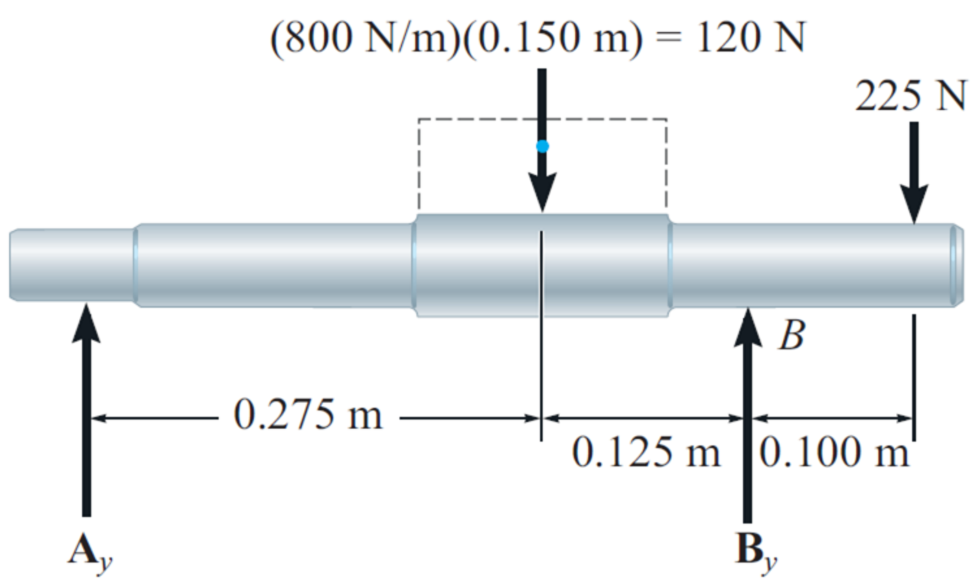


圖 1-5

例題1-2(續)



(b)

圖 1-5

例題1-2(續)

解

本題將取軸的 AC 段來解。

支撐反作用力　圖 1-5b 為全軸的自由體圖。因將考慮 AC 段，故僅需求 A 點反作用力。為何？

$$\circlearrowright + \Sigma M_B = 0；-A_y(0.400\text{ m}) + 120\text{ N}(0.125\text{ m}) - 225\text{ N}(0.100\text{ m}) = 0$$

$$A_y = -18.75\text{ N}$$

$\mathbf{A}_y$ 負號顯示其方向與自由體圖相反。

自由體圖　AC 段的自由體圖示於圖 1-5c。

例題1-2(續)

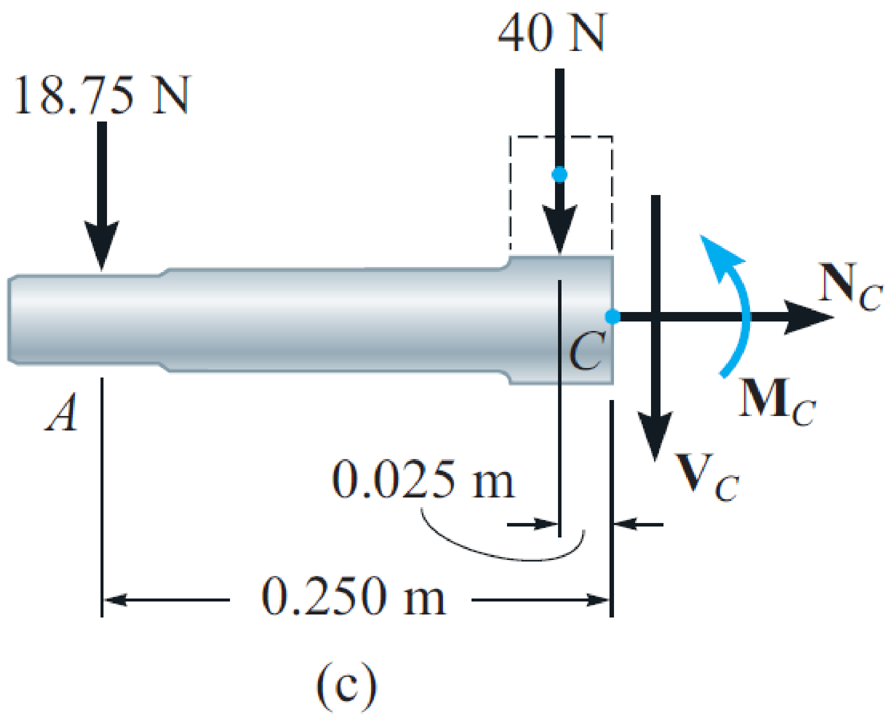


圖 1-5

例題1-2(續)

平衡方程式

$\xrightarrow{+}\ \Sigma F_x = 0\ ;\qquad N_C = 0$ ■

$+\uparrow\ \Sigma F_y = 0\ ;\qquad -18.75\,\text{N} - 40\,\text{N} - V_C = 0$

$$V_C = -58.8\,\text{N}$$ ■

$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0\ ;\quad M_C + 40\,\text{N}(0.025\,\text{m}) + 18.75\,\text{N}(0.250\,\text{m}) = 0$

$$M_C = -5.69\,\text{N}\cdot\text{m}$$ ■

例題1-3

一重 500 kg 的引擎由一起重機吊桿支撐，如圖 1-6a 所示，求作用在吊桿 E 點橫截面之內部合載重。

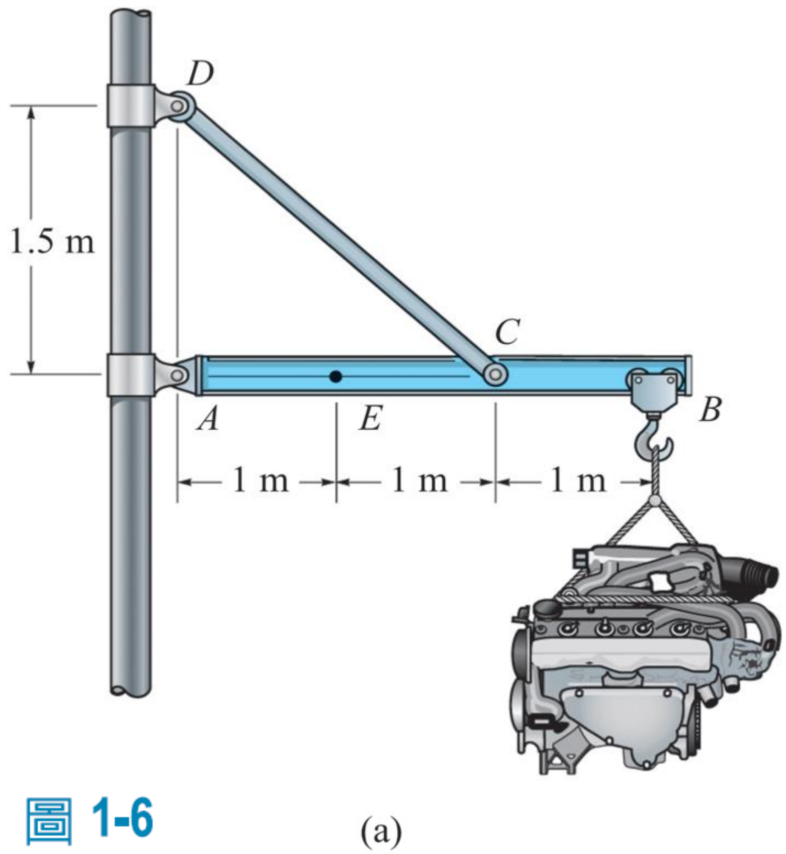


圖 1-6

(a)

例題1-3(續)

解

支撐反力　先考慮吊桿的 AE 段，求 A 銷反力。注意，CD 桿為二力桿，吊桿的自由體圖示於圖 1-6b。應用平衡方程式：

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0\,;\; F_{CD}\left(\frac{3}{5}\right)(2\text{ m}) - [500(9.81)\text{ N}](3\text{ m}) = 0$$

$$F_{CD} = 12\,262.5\text{ N}$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\ \Sigma F_x = 0\,;\quad A_x - (12\,262.5\text{ N})\left(\frac{4}{5}\right) = 0$$

$$A_x = 9810\text{ N}$$

$$+\uparrow\ \Sigma F_y = 0\,;\quad -A_y + (12\,262.5\text{ N})\left(\frac{3}{5}\right) - 500(9.81)\text{ N} = 0$$

$$A_y = 2452.5\text{ N}$$

例題1-3(續)

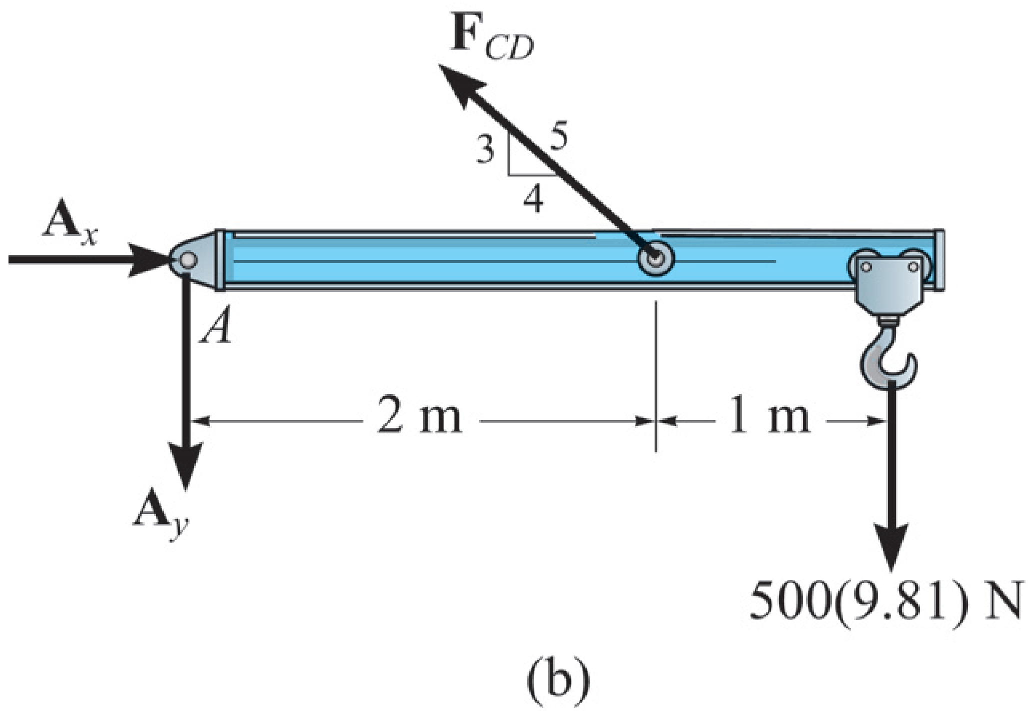
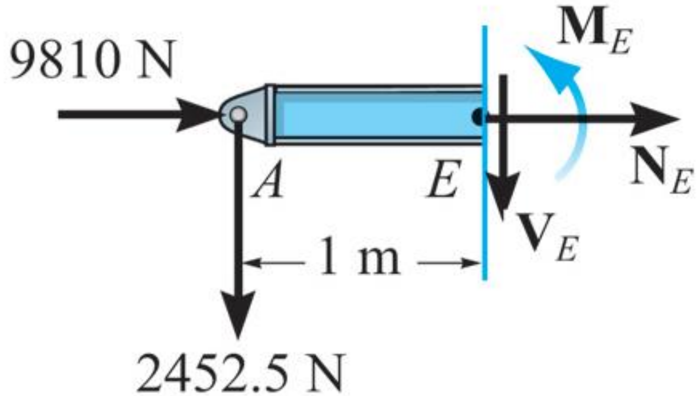


圖 1-6

例題1-3(續)

自由體圖　*A* 段的自由體圖示於圖 1-6c。



(c)

圖 1-6

例題1-3(續)

平衡方程式

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \quad N_E + 9810\,\text{N} = 0$$

$$N_E = -9810\,\text{N} = -9.81\,\text{kN} \quad \blacksquare$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -V_E - 2452.5\,\text{N} = 0$$

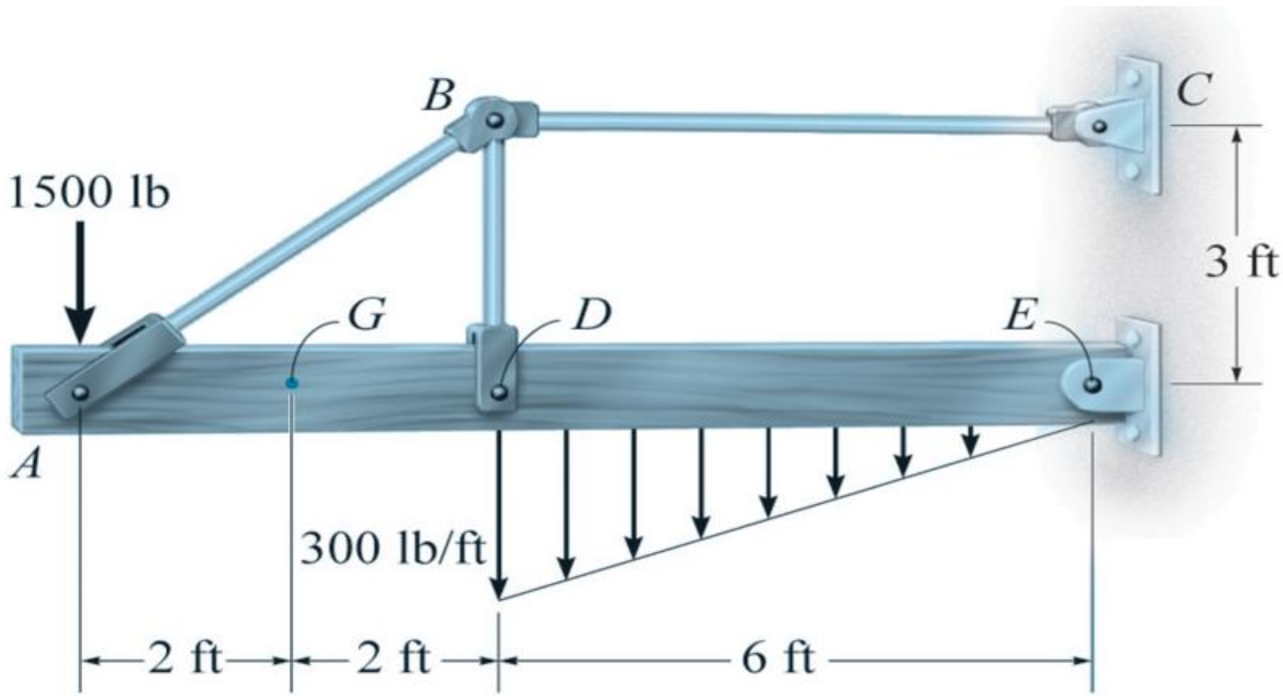
$$V_E = -2452.5\,\text{N} = -2.45\,\text{kN} \quad \blacksquare$$

$$\circlearrowright + \Sigma M_E = 0; \quad M_E + (2452.5\,\text{N})(1\,\text{m}) = 0$$

$$M_E = -2452.5\,\text{N}\cdot\text{m} = -2.45\,\text{kN}\cdot\text{m} \quad \blacksquare$$

例題1-4

求圖 1-7a 所示作用於樑上 G 點橫截面的內部合載重，各節點為銷接。



(a)

例題1-4(續)

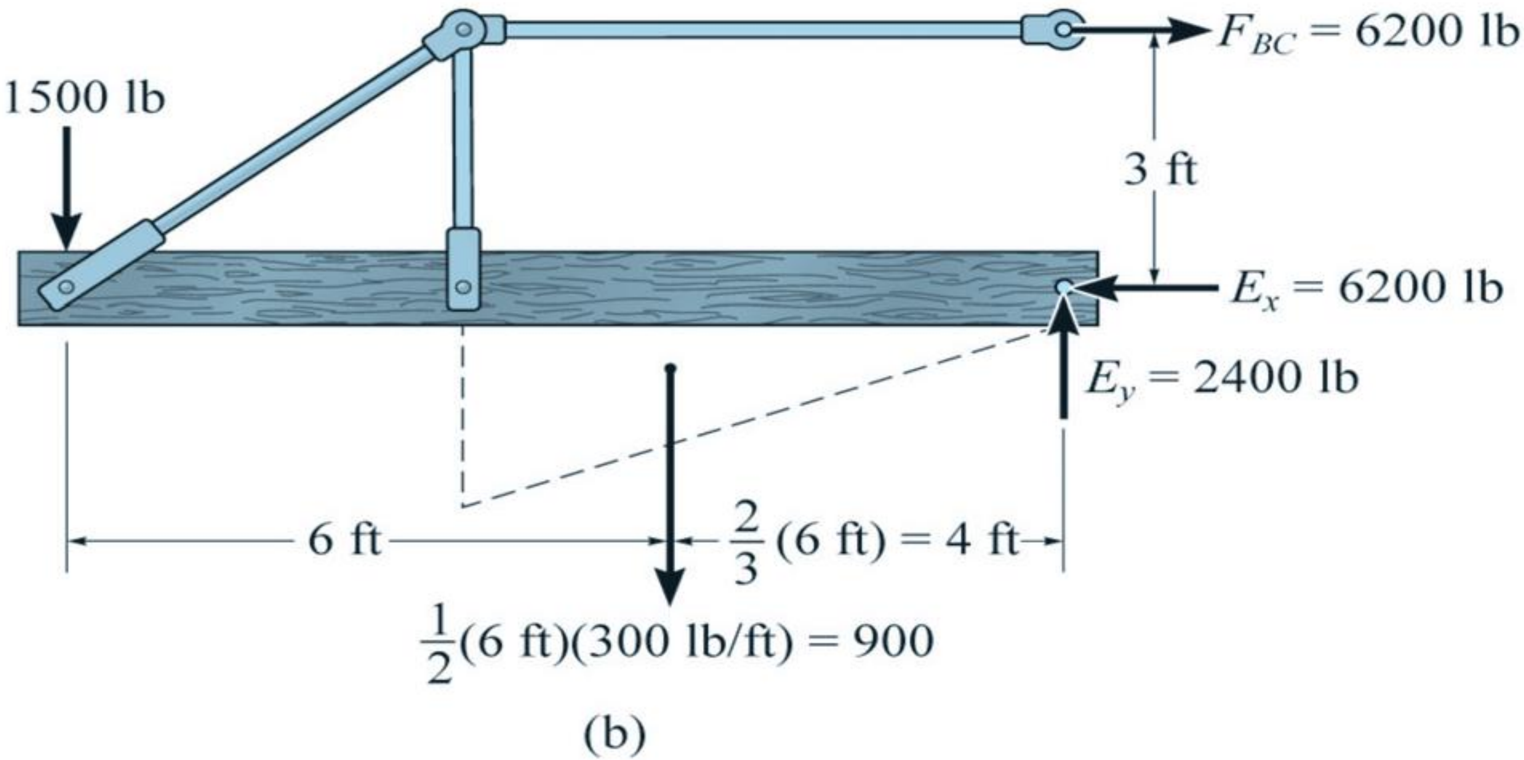
解

支撐反作用力　此處分析將考慮 AG 段。圖 1-7b 為整體結構之自由體圖。證明 E、C 處計算所得之反作用力。特別注意 BC 為二力桿件，因為僅有二力作用其上。因此 C 點反作用力必如圖所示為水平方向。

由於 BA 及 BD 亦為二力桿件，接點 B 的自由體圖如圖 1-7c。同樣地，證明了 $\mathbf{F}_{BA}$ 及 $\mathbf{F}_{BD}$ 的大小。

自由體圖　利用 $\mathbf{F}_{BA}$ 值，樑左半部 AG 如圖 1-7d。

例題1-4(續)



$F_{BC} = 6200$ lb
1500 lb
3 ft
$E_x = 6200$ lb
$E_y = 2400$ lb
6 ft
$\frac{2}{3}(6\text{ ft}) = 4$ ft
$\frac{1}{2}(6\text{ ft})(300\text{ lb/ft}) = 900$
(b)

圖 1-7

例題1-4(續)

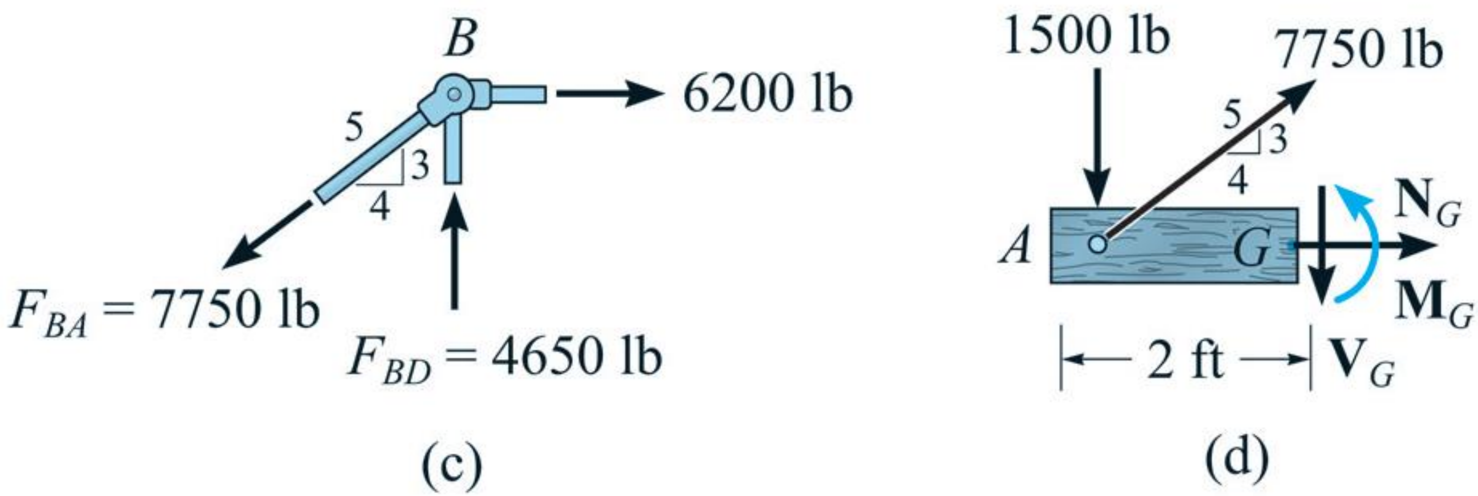

B
6200 lb
5
3
4
$F_{BA} = 7750$ lb
$F_{BD} = 4650$ lb
(c)
1500 lb
7750 lb
5
3
4
A
G
N_G
M_G
2 ft
V_G
(d)

圖 1-7

例題1-4(續)

平衡方程式　由 AG 段之平衡方程式，得

$$\overset{+}{\rightarrow}\ \Sigma F_x = 0\ ;\quad 7750\ \text{lb}\left(\frac{4}{5}\right) + N_G = 0 \quad N_G = -6200\ \text{lb}$$ ■

$$+\uparrow\ \Sigma F_y = 0\ ;\quad -1500\ \text{lb} + 7750\ \text{lb}\left(\frac{3}{5}\right) - V_G = 0$$

$$V_G = 3150\ \text{lb}$$ ■

$$\circlearrowright + \Sigma M_G = 0\ ;\ M_G - (7750\ \text{lb})\left(\frac{3}{5}\right)(2\ \text{ft}) + 1500\ \text{lb}\ (2\ \text{ft}) = 0$$

$$M_G = 6300\ \text{lb}\cdot\text{ft}$$ ■

例題1-5

求如圖 1-8a 所示作用在管件 *B* 點橫截面的內部合載重。管件質量為 2 kg/m 並在端點 *A* 承受一 50 N 垂直力與一 70 N · m 偶矩。此管件固定於牆上 *C* 點。

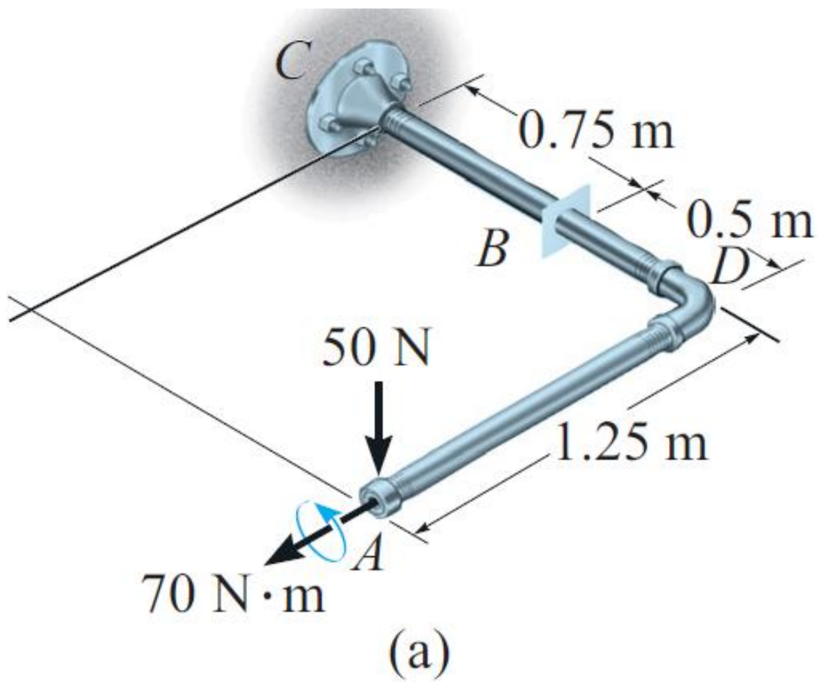


圖 1-8

例題1-5(續)

解

因 AB 段不須求 C 點之支撐反作用力，故此問題之解可考慮 AB 段。

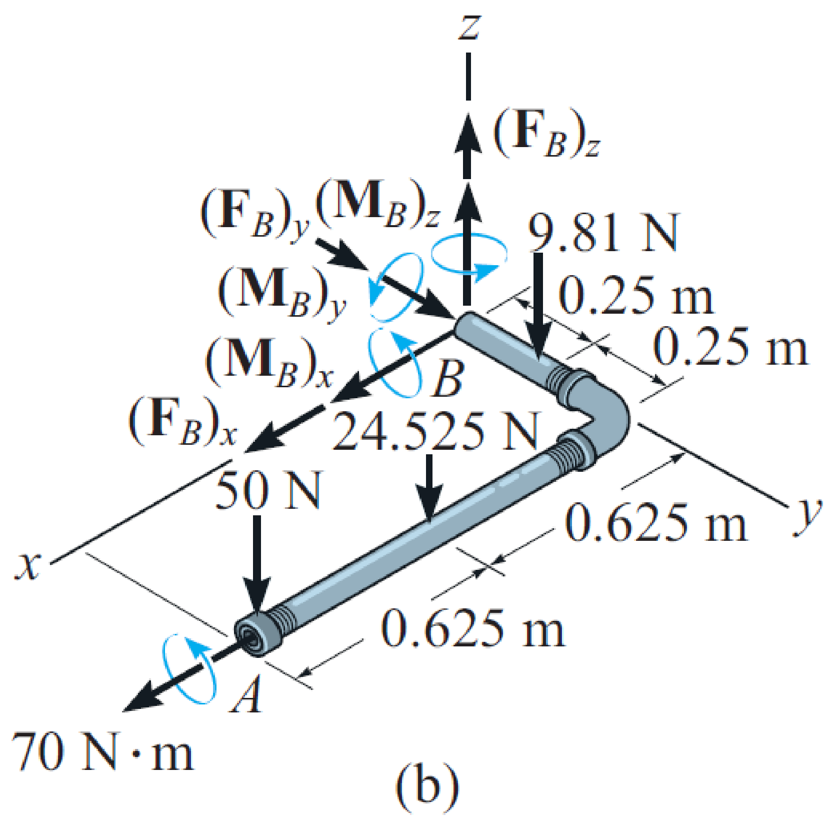
自由體圖　在 B 點建構 x, y, z 軸，AB 段自由體圖示於圖 1-8b。截面之合力及合力矩的分量均假設作用在正座標軸方向，且通過在 B 點橫截面積之形心。管件各部分重量計算如下：

$$W_{BD} = (2\,\text{kg/m})(0.5\,\text{m})(9.81\,\text{N/kg}) = 9.81\,\text{N}$$

$$W_{AD} = (2\,\text{kg/m})(1.25\,\text{m})(9.81\,\text{N/kg}) = 24.525\,\text{N}$$

這些力均通過各部分的重心。

例題1-5(續)



z
(F_B)_z
(F_B)_y (M_B)_z
9.81 N
(M_B)_y
0.25 m
0.25 m
(M_B)_x
B
(F_B)_x
24.525 N
50 N
x
0.625 m
y
0.625 m
A
70 N·m
(b)

圖 1-8

例題1-5(續)

平衡方程式　應用六個純量平衡方程式，得*

$$\Sigma F_x = 0\text{；}\qquad (F_B)_x = 0 \qquad \blacksquare$$

$$\Sigma F_y = 0\text{；}\qquad (F_B)_y = 0 \qquad \blacksquare$$

$$\Sigma F_z = 0\text{；}\qquad (F_B)_z - 9.81\text{ N} - 24.525\text{ N} - 50\text{ N} = 0$$

$$(F_B)_z = 84.3\text{ N} \qquad \blacksquare$$

$$\Sigma (M_B)_x = 0\text{；}\qquad (M_B)_x + 70\text{ N}\cdot\text{m} - 50\text{ N}(0.5\text{ m})$$

$$- 24.525\text{ N}(0.5\text{ m}) - 9.81\text{ N}(0.25\text{ m}) = 0$$

$$(M_B)_x = -30.3\text{ N}\cdot\text{m} \qquad \blacksquare$$

$$\Sigma (M_B)_y = 0\text{；}\ (M_B)_y + 24.525\text{ N}(0.625\text{ m}) + 50\text{ N}(1.25\text{ m}) = 0$$

$$(M_B)_y = -77.8\text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\Sigma (M_B)_z = 0\text{；}\qquad (M_B)_z = 0 \qquad \blacksquare$$

應力

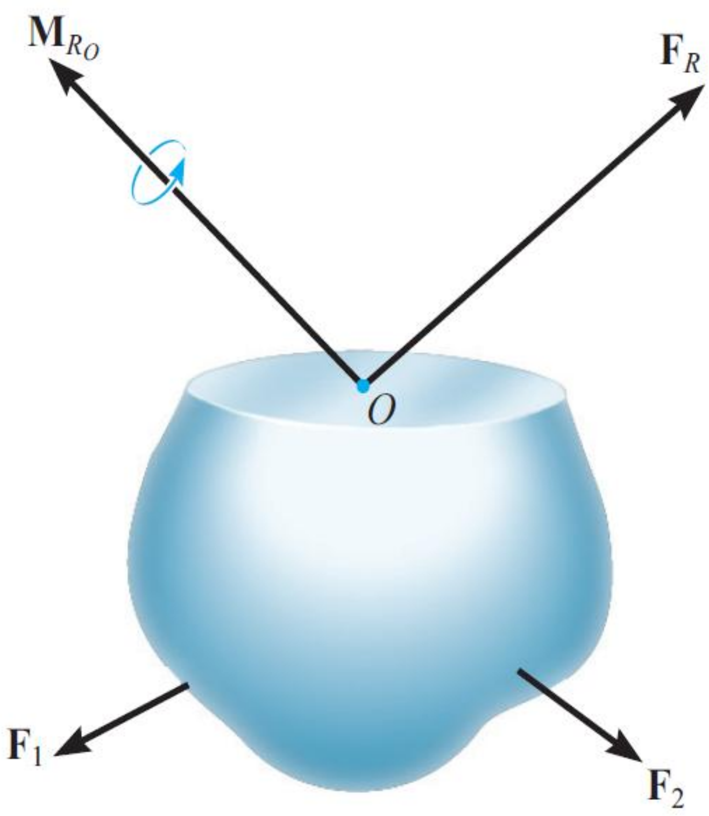


圖 1-9

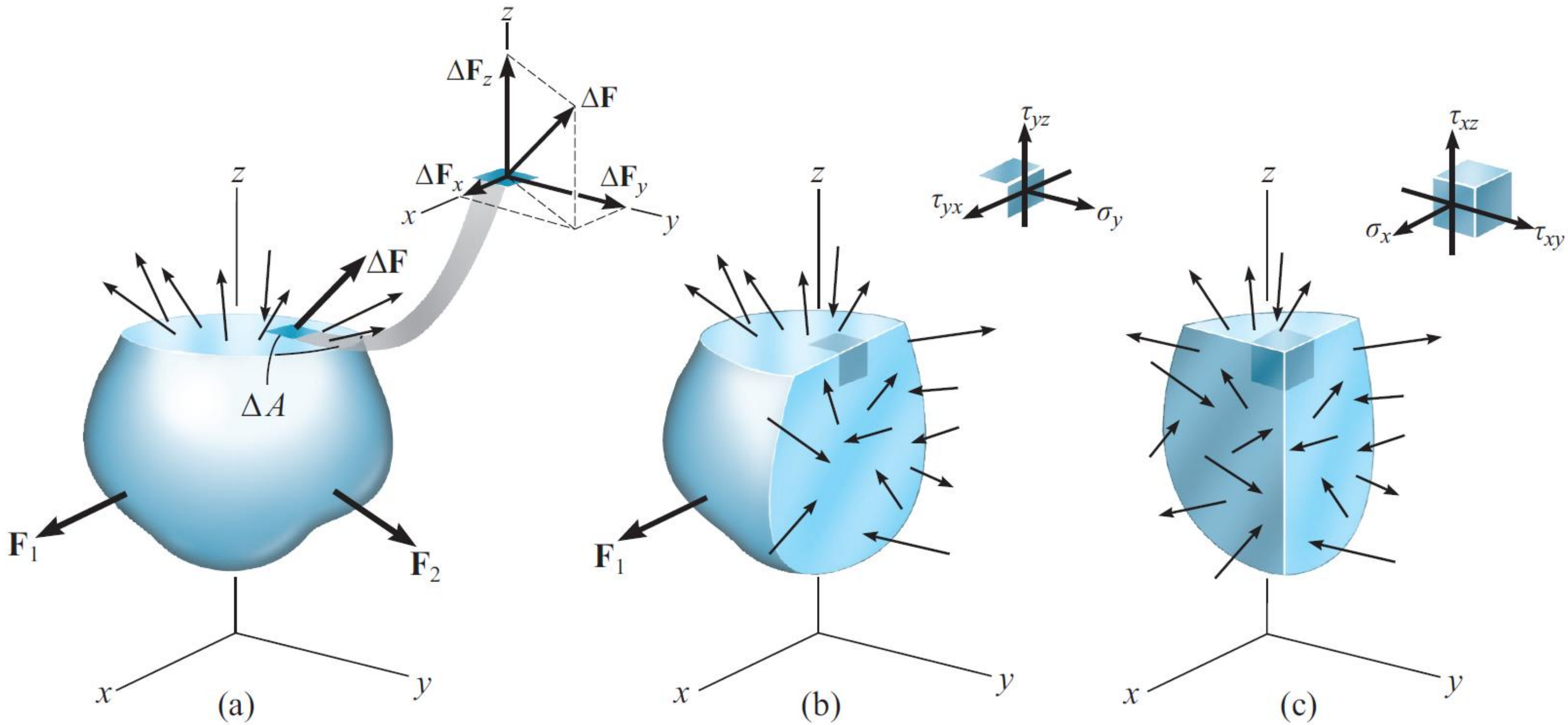


圖 1-10

- 先將截面積切成小面積開始，將ΔA切成非常小之後，當ΔA面積趨近於零時，力$\Delta \mathbf{F}$及其分量亦趨近於零，但力與面積之比值通常將趨近於一有限的極限值，此比值稱為應力 (stress)，其描述通過某點的一特定平面 (面積) 上之內力的強度。

正向應力

- 作用於與ΔA垂直的力之強度或單位面積上的力定義為正向應力 (normal stress)， σ (sigma)。由於$\Delta \mathbf{F}_z$垂直於此面積，故

$$\sigma_z = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A} \tag{1-4}$$

若正向力或正向應力對面積元素ΔA為「拉」的作用，則稱為拉應力 (tensile stress) ；若對ΔA為「推」的作用則稱為壓應力 (compressive stress)。

剪應力

- 作用於與ΔA相切的力之強度或單位面積上的力定義為剪應力 (shear stress)， τ (tau)。此處剪應力分量為

$$\tau_{zx} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A}$$

$$\tau_{zy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A} \qquad (1\text{-}5)$$

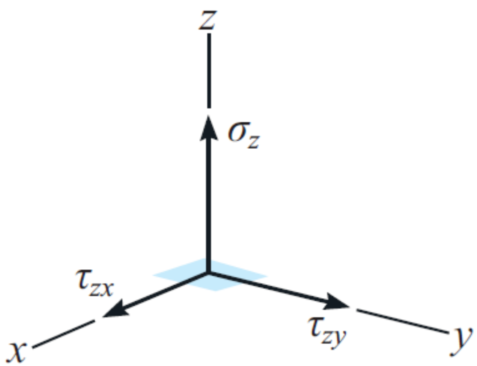


圖 1-11

一般應力狀態

- 此應力狀態以作用在該元素各面之三個分量標示。這些應力分量是描述該元素是沿x, y, z軸放置時該點之應力狀態。
- 若物體切割之立方體為其他方向，則其應力狀態需以不同組的應力分量定義。

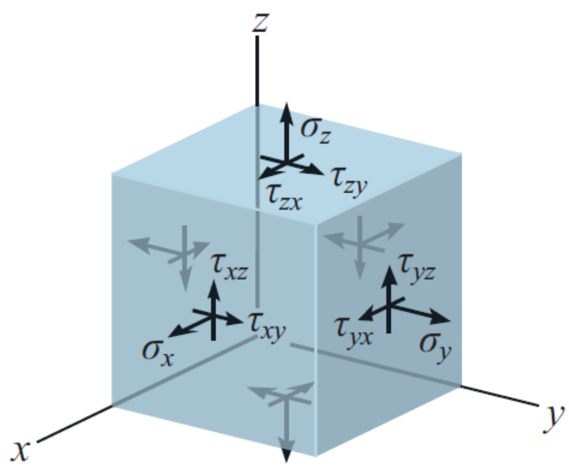


圖 1-12

單位

- 在國際標準或SI系統中，正向應力及剪應力的大小係以基本單位的牛頓/平方公尺(N/m^2)表示，此單位稱為巴斯卡pascal ($1Pa = 1\ N/m^2$)，是相當小的單位，故工程上常在字首前加kilo-(10^3)，符號k；mega-(10^6)，符號M；或giga-(10^9) ，符號G。
- 在美國慣用或呎-磅-秒單位系統中，工程師常用磅/平方英吋 (psi) 或仟磅/平方英吋 (ksi) 表示應力的單位，此處1仟磅 (kip) = 1000lb。

軸向載重桿件內之平均正向應力

- 桿件為等橫截面(prismatic)，表示沿長度方向的橫截面不變。
- 當載重透過橫截面積上的形心，作用於桿件時，只要桿材為均質，且等向性，則桿件會經過形心，均勻地呈現長度變化。

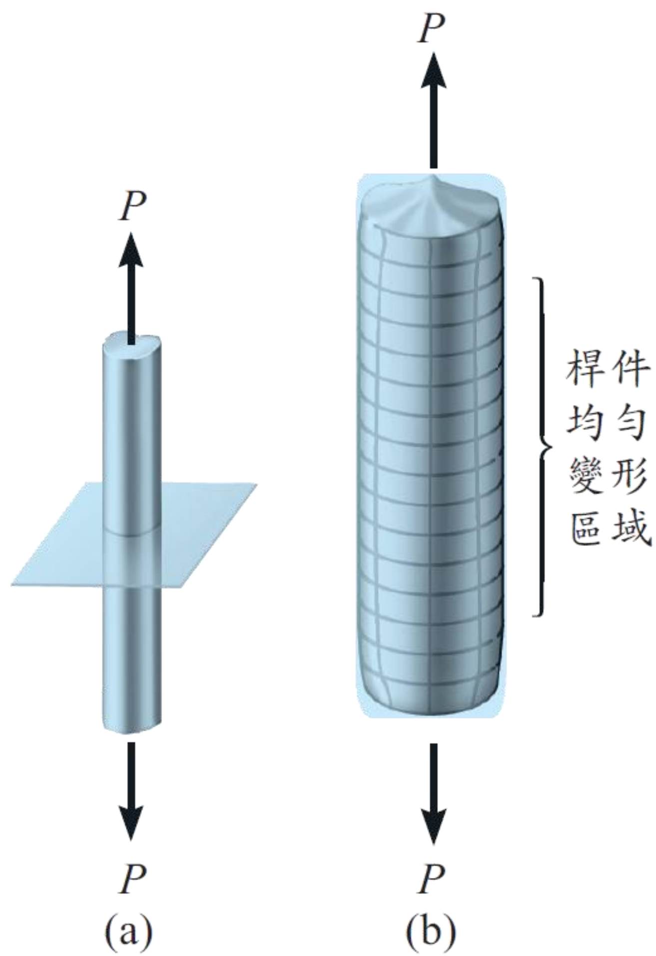


圖 1-13

平均正向應力分佈

- 若切過一桿件的橫截面，並分成兩部分，則橫截面上合力的平衡必等於P。
- 由於材料的均勻變形，橫截面上必定受到等正向應力的分佈。

$$+\uparrow F_{Rz} = \Sigma F_z \ ; \qquad \int dF = \int_A \sigma \, dA$$

$$P = \sigma A$$

$$\boxed{\sigma = \frac{P}{A}} \qquad (1\text{-}6)$$

此處

σ＝橫截面積上任一點之平均正向應力。

P＝內部正向合力，其作用於橫截面積之形心。P 是藉截面法及平衡方程式求得。

A＝欲求桿件的橫截面積。

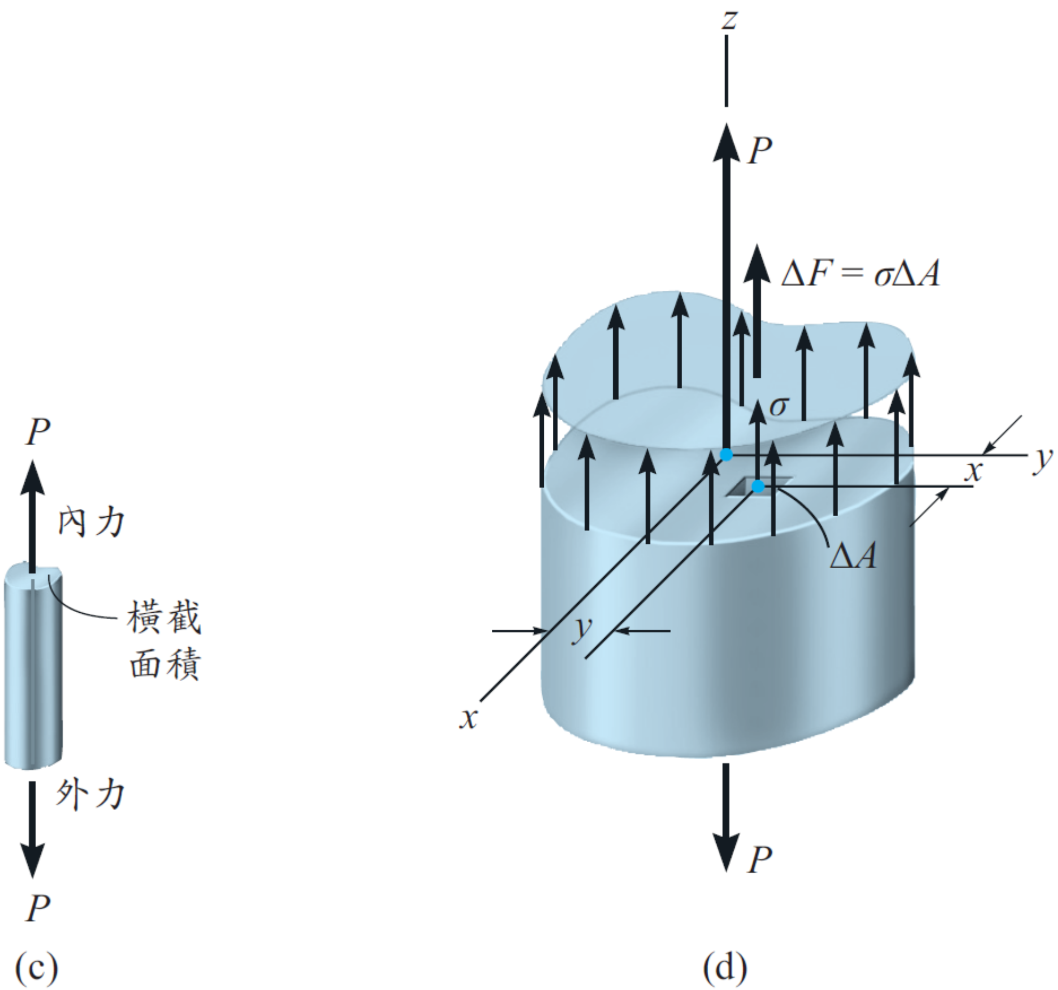


圖 1-13 (續)

平衡

- 一軸向載重桿件橫截面上各點之任何材料體元素僅有一正向應力存在。若考慮圖1-14元素在垂直方向之平衡，則應用力平衡方程式

$$\Sigma F_z = 0\ ; \qquad \sigma(\Delta A) - \sigma'(\Delta A) = 0$$

$$\sigma = \sigma'$$

元素上兩正向應力分量必為大小相等方向相反，這稱為單軸應力(uniaxial stress)。

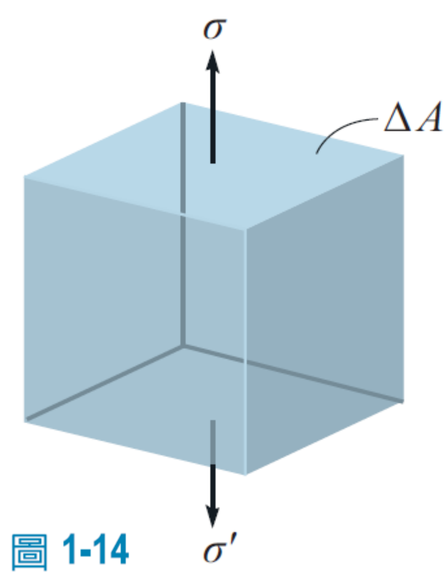


圖 1-14

- 力矩平衡的結果，**此合力必通過體積形心**。

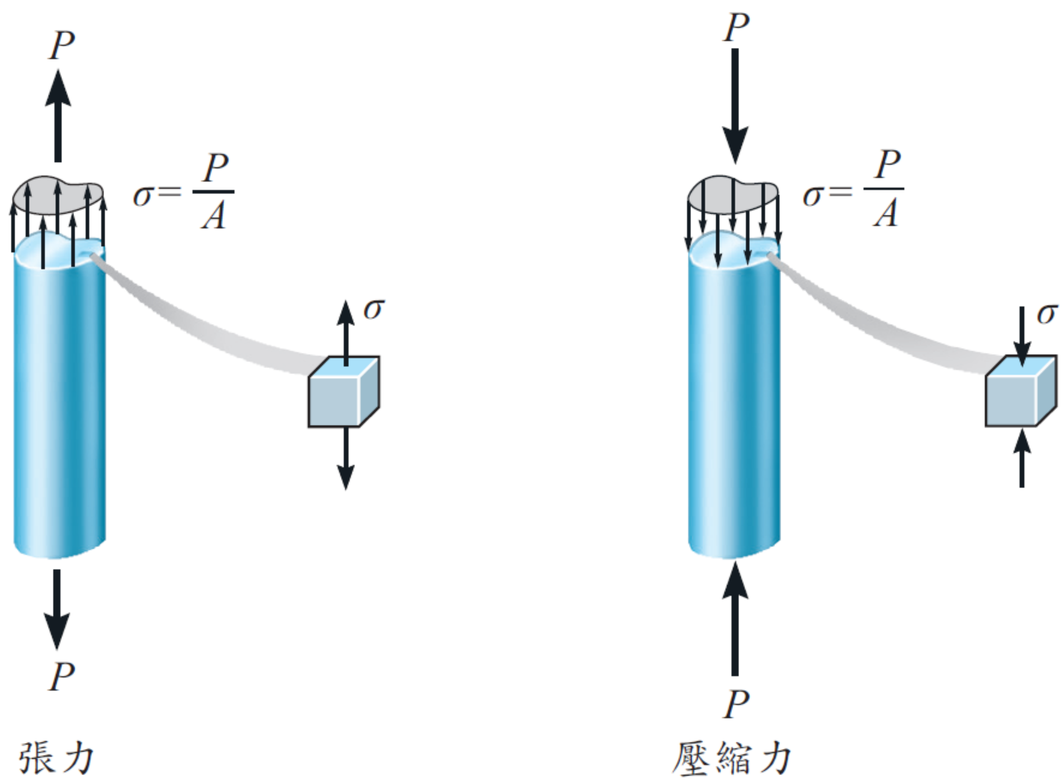


圖 1-15

最大平均正向應力

- 內力P及橫截面積A兩者沿桿件縱軸方向均為常數，因此整個桿件沿長度之正向應力$\sigma = P/A$亦為常數。
- 有時桿件沿軸向可承受數個外加載重，或其截面積可能改變。
- 若要求最大平均正向應力，則尋找P/A比值為最大的位置相當重要。
- 沿桿件在不同截面上求內力P 。此時畫出軸向力圖或正向力圖將有助於顯示其變化。

此鋼製繫桿是用以懸吊樓梯的一部分，故承受拉伸應力。

例題1-6

圖 1-16a 桿件具等寬度 35 mm 及等厚度 10 mm。求桿件在承受如圖示載重時之最大平均正向應力。

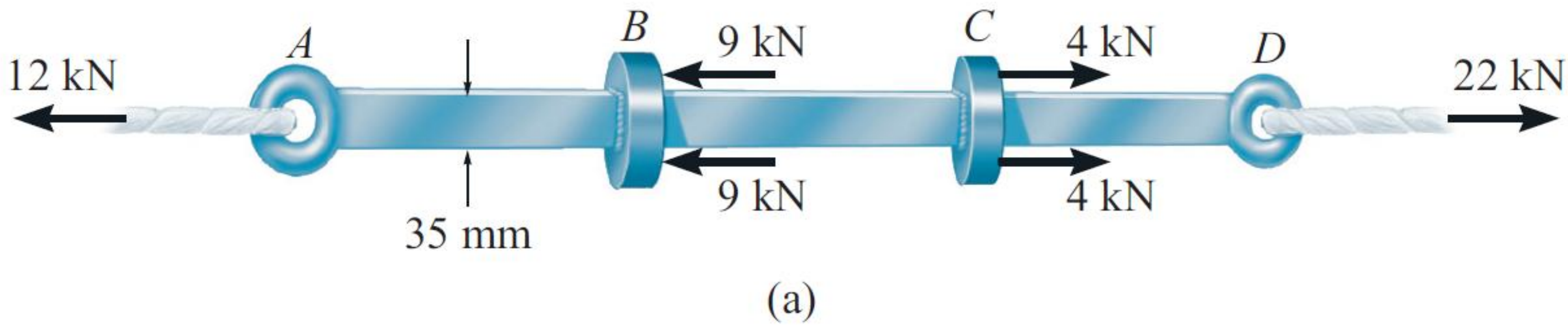


圖 1-16

例題1-6(續)

解

內部合載重　觀察顯示作用於 AB、BC 及 CD 各段之內部軸向力均為常數，但大小不同。利用截面法，這些載重可由圖 1-16b 決定；將結果繪於圖 1-16c 之正向力圖。由圖看出最大載重發生於 BC 段，$P_{BC}=30\text{ kN}$。因桿件橫截面積為常數，最大平均正向應力亦發生於此段內。

平均正向應力　用(1-6)式，得

$$\sigma_{BC}=\frac{P_{BC}}{A}=\frac{30(10^3)\text{N}}{(0.035\text{ m})(0.010\text{ m})}=85.7\text{ MPa}$$

例題1-6(續)

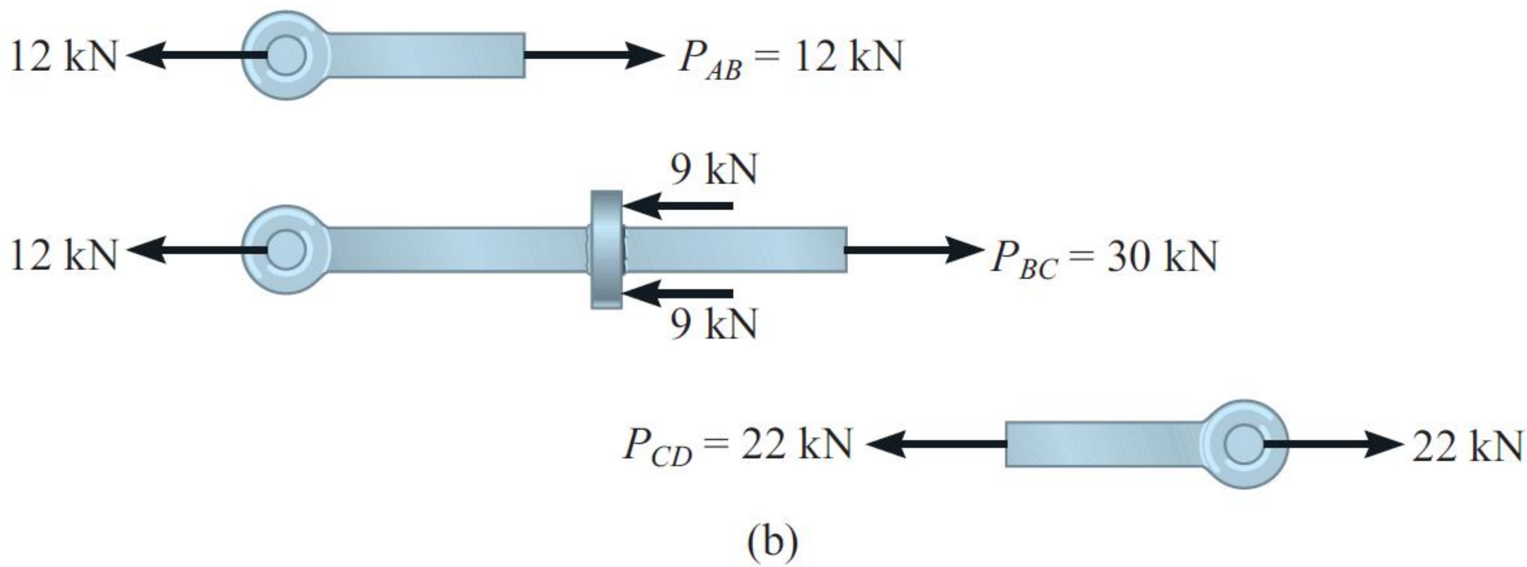
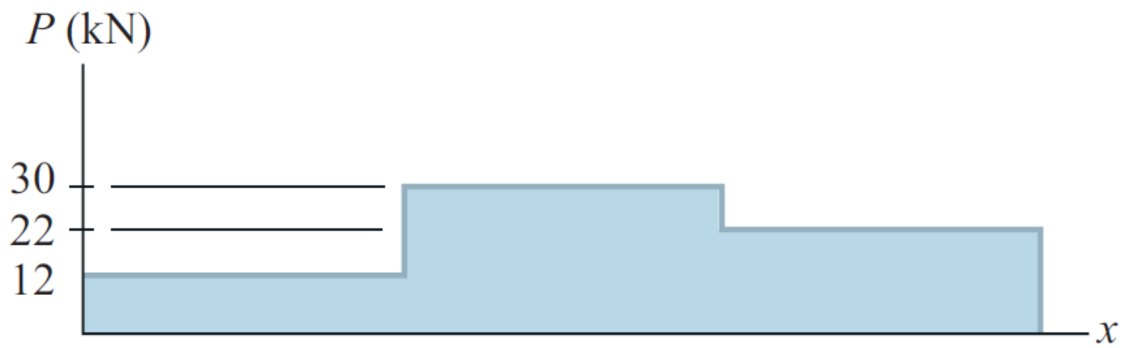


圖 1-16

例題1-6(續)



(c)

圖 1-16

例題1-6(續)

註　作用於桿件 *BC* 段任意橫截面上之應力分佈示於圖 1-16d。此應力分佈的圖形顯示其體積 (或方塊) 等於載重 30 kN；亦即，30 kN = (85.7 MPa)(35 mm)(10 mm)。

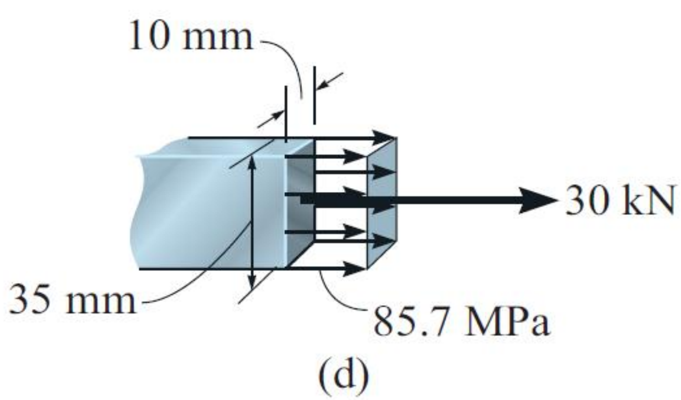
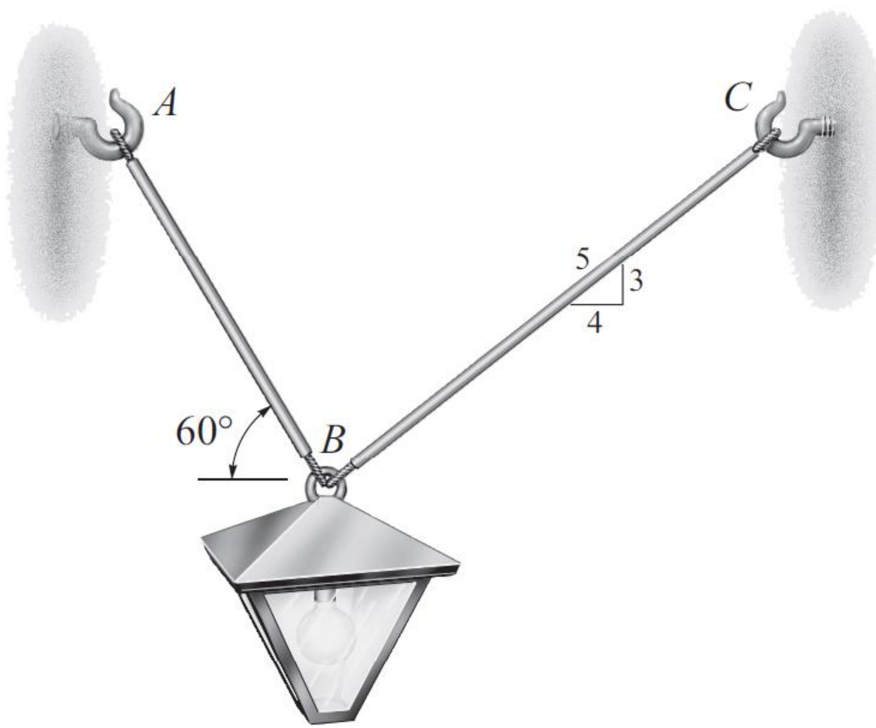


圖 1-16

例題1-7

80 kg 之燈具由兩桿件 *AB* 及 *BC* 支撐，如圖 1-17a。若 *AB* 桿直徑 10 mm 而 *BC* 桿直徑 8 mm，求各桿件之平均正向應力。



(a)

圖 1-17

例題1-7(續)

解

內部合載重　首先須求各桿件之軸向力。燈具之自由體圖示於圖 1-17b，應用力平衡方程式得

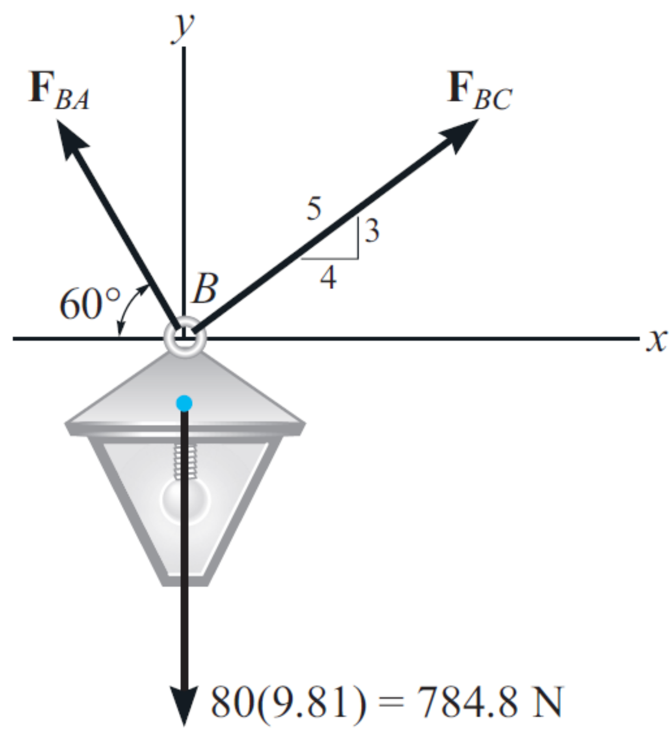
$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0\text{；} \qquad F_{BC}\left(\frac{4}{5}\right) - F_{BA}\cos 60° = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0\text{；} \qquad F_{BC}\left(\frac{3}{5}\right) + F_{BA}\sin 60° - 784.8\,\text{N} = 0$$

$$F_{BC} = 395.2\,\text{N},\ \ F_{BA} = 632.4\,\text{N}$$

由牛頓第三運動定律，作用力與反作用力大小相同方向相反，這些力導致整個桿件長度上承受張力。

例題1-7(續)



(b)

圖 1-17

例題1-7(續)

平均正向應力　依 (1-6) 式，得

$$\sigma_{BC}=\frac{F_{BC}}{A_{BC}}=\frac{395.2\,\mathrm{N}}{\pi(0.004\,\mathrm{m})^2}=7.86\,\mathrm{MPa} \quad \blacksquare$$

$$\sigma_{BA}=\frac{F_{BA}}{A_{BA}}=\frac{632.4\,\mathrm{N}}{\pi(0.005\,\mathrm{m})^2}=8.05\,\mathrm{MPa} \quad \blacksquare$$

註　作用於 AB 桿橫截面之平均正向應力分佈，如圖 1-17c，此橫截面上某一點材料元素之應力則示於圖 1-17d。

例題1-7(續)

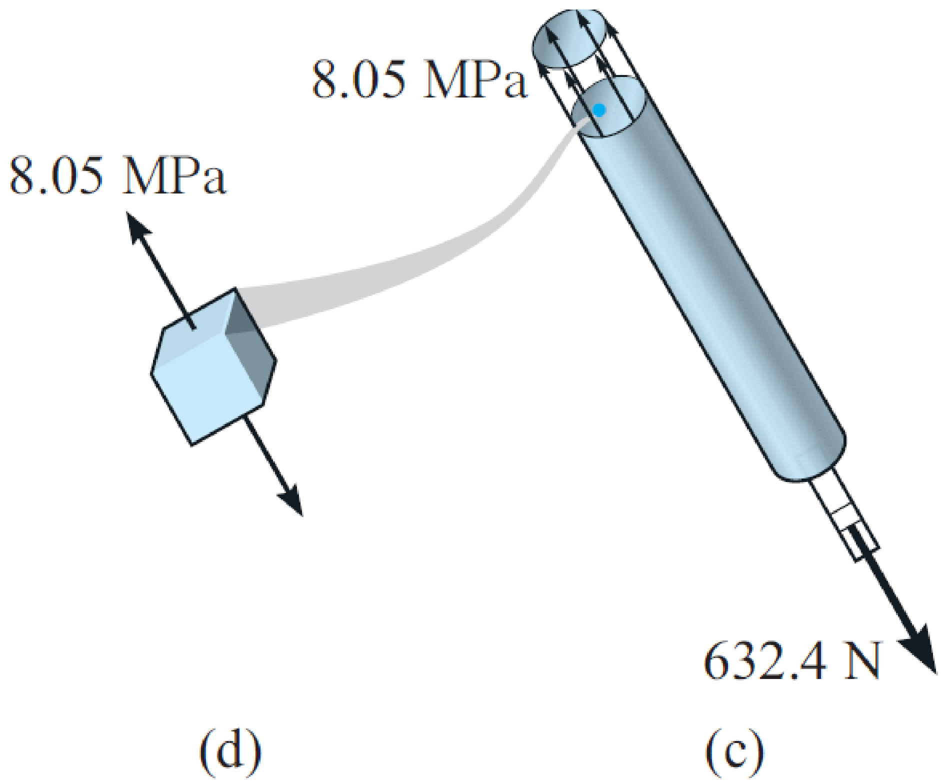
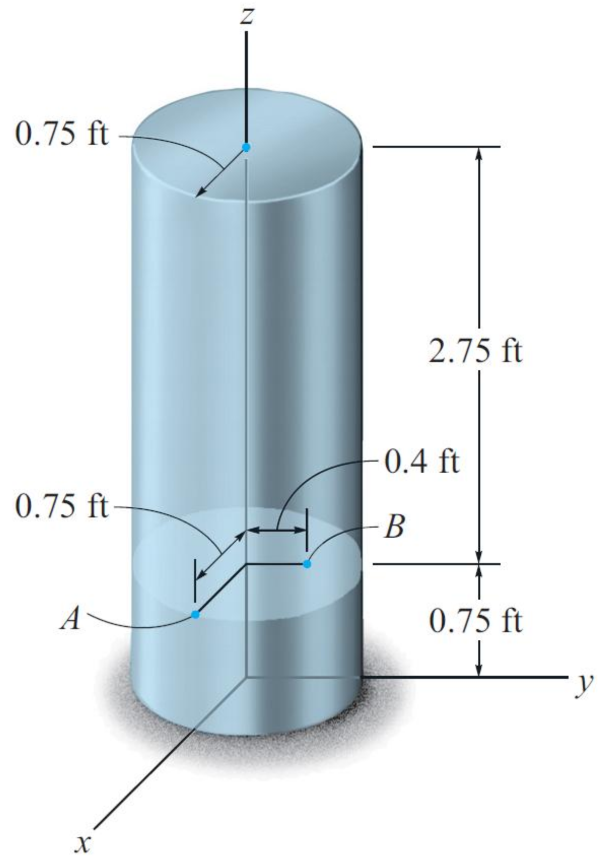


圖 1-17

例題1-8

圖 1-18a 所示鋼製鑄件材料的比重 $\gamma_{st} = 490\ \text{lb}/\text{ft}^3$。求作用於 A 及 B 點之平均壓縮應力。



(a)

圖 1-18

例題1-8(續)

解

內部合載重　通過 A 及 B 點截面之鑄件上半部分的自由體圖示於圖 1-18b，此部分重量 $W_{st}=\gamma_{st}V_{st}$。故此截面內部軸向力 P 為

$$+\uparrow \Sigma F_z=0\text{；}\qquad P-W_{st}=0$$

$$P-(490\text{ lb}/\text{ft}^3)(2.75\text{ ft})\pi(0.75\text{ ft})^2=0$$

$$P=2381\text{ lb}$$

平均壓縮應力　橫截面積為 $A=\pi(0.75\text{ ft})^2$，所以平均壓縮應力為

$$\sigma=\frac{P}{A}=\frac{2381\text{ lb}}{\pi(0.75\text{ ft})^2}=1347.5\text{ lb}/\text{ft}^2$$

$$\sigma=1347.5\text{ lb}/\text{ft}^2(1\text{ ft}^2/144\text{ in}^2)=9.36\text{ psi}$$

■

例題1-8(續)

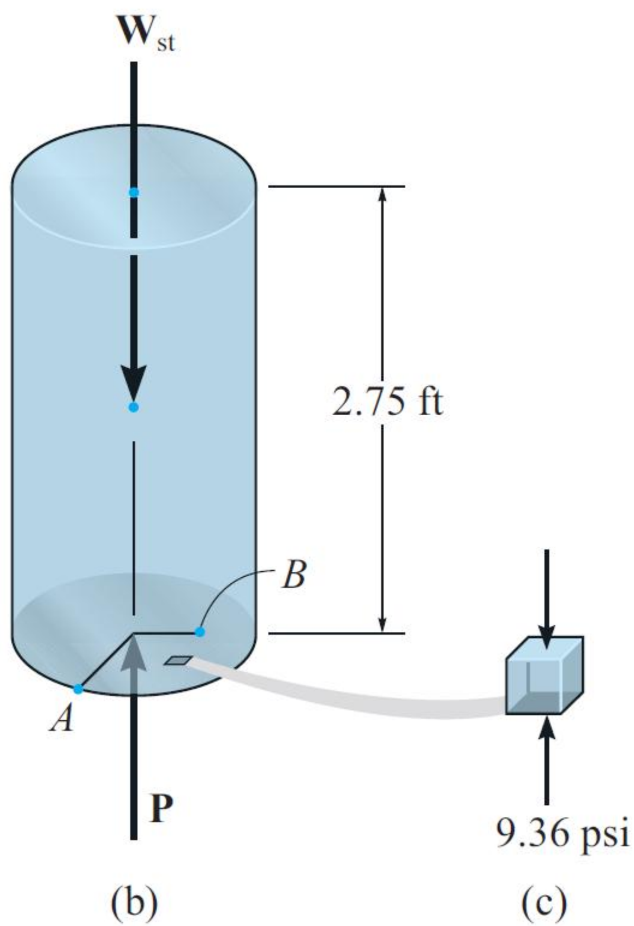
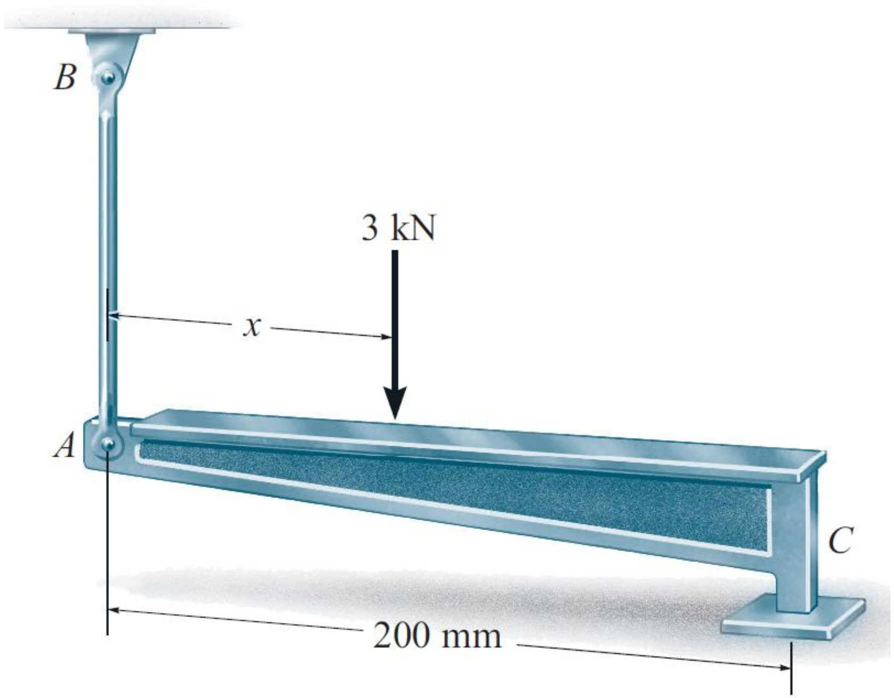


圖 1-18

例題1-9

圖 1-19a 所示桿件 *AC* 承受垂直力 3 kN。欲使平滑支撐 *C* 處的平均壓應力等於繫桿 *AB* 的平均拉應力，則此力位置 *x* 在何處。繫桿截面積為 400 mm^2，*C* 處接觸面積 650 mm^2。



(a)

圖 1-19

例題1-9(續)

解

內部合載重　藉由圖 1-19b 桿件 AC 的自由體圖可得 A、C 處受力之關係。此有三個未知數，F_{AB}、F_C 及 x。解此題使用牛頓及公釐為單位。

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad F_{AB} + F_C - 3000\,\text{N} = 0 \qquad (1)$$

$$\circlearrowright + \Sigma M_A = 0; \qquad -3000\,\text{N}(x) + F_C\,(200\,\text{mm}) = 0 \qquad (2)$$

例題1-9(續)

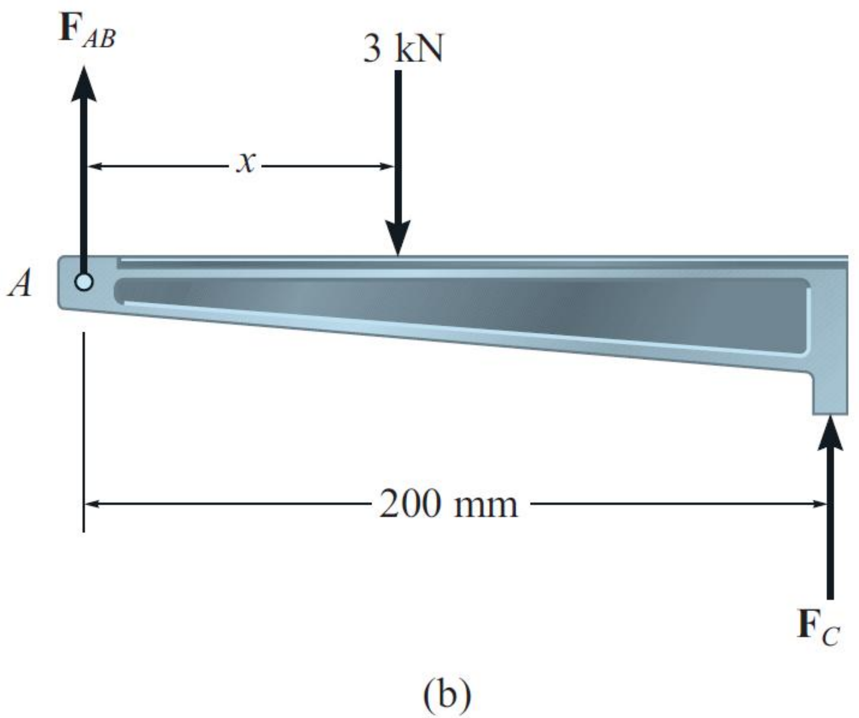


圖 1-19

例題1-9(續)

平均正向應力　在此所需的第三個方程式可藉由 AB 桿件拉伸應力必須等於 C 處壓縮應力的關係得到，即

$$\sigma = \frac{F_{AB}}{400\,\text{mm}^2} = \frac{F_C}{650\,\text{mm}^2} \qquad F_C = 1.625F_{AB}$$

代入 (1) 式，可解 F_{AB}，再解 F_C，得

$$F_{AB} = 1143\,\text{N} \qquad F_C = 1857\,\text{N}$$

施加載重的位置則由 (2) 式求出

$$x = 124\,\text{mm}$$ ■

註　$0 < x < 200\,\text{mm}$，所得結果可滿足之。

平均剪應力

- 分佈在產生剪力之各截面積之平均剪應力 (average shear stress) 定義為

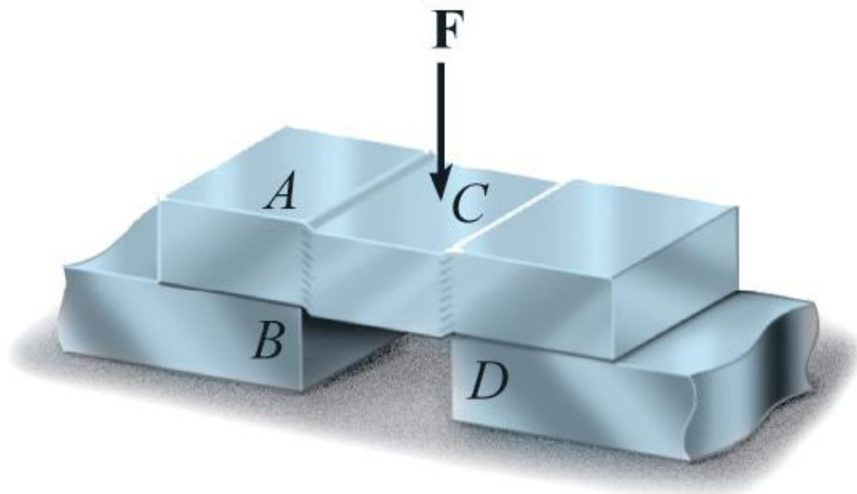
$$\boxed{\tau_{\text{avg}} = \frac{V}{A}} \tag{1-7}$$

此處

τ_{avg}=截面上平均剪應力，假設在截面上各點均相同。

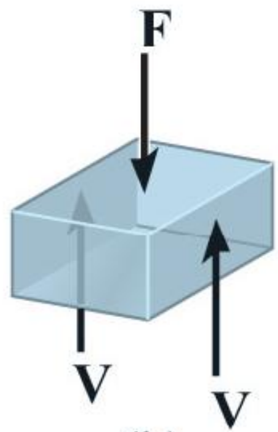
V=由平衡方程式求得的在截面上之內部總剪力。

A=截面積。

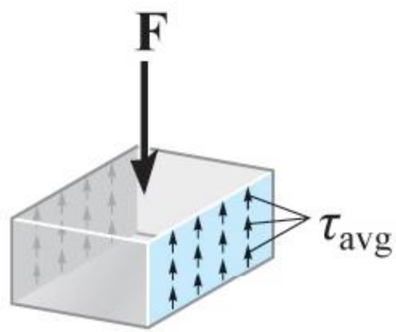


(a)

圖 1-20



(b)



(c)

圖 1-20

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

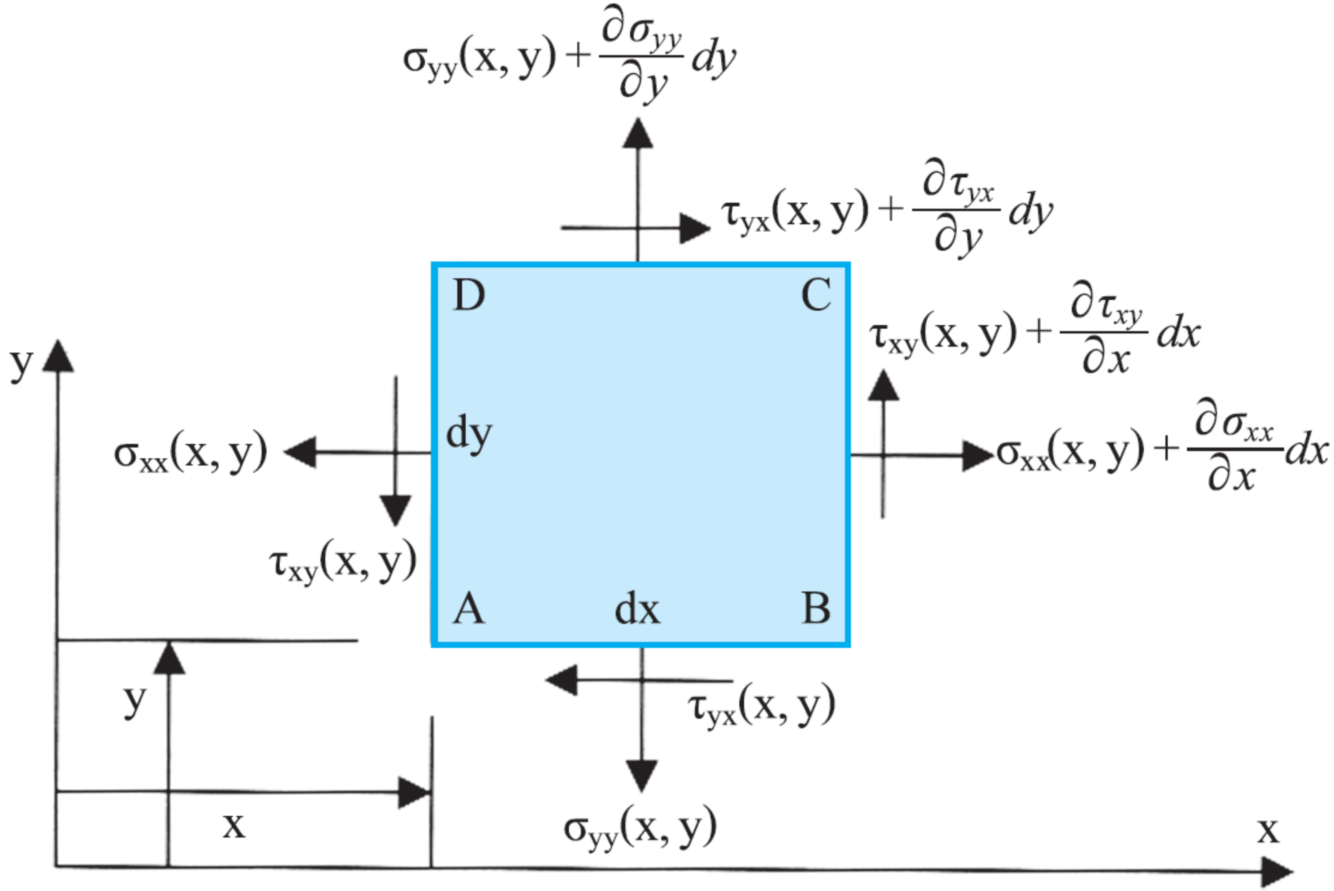
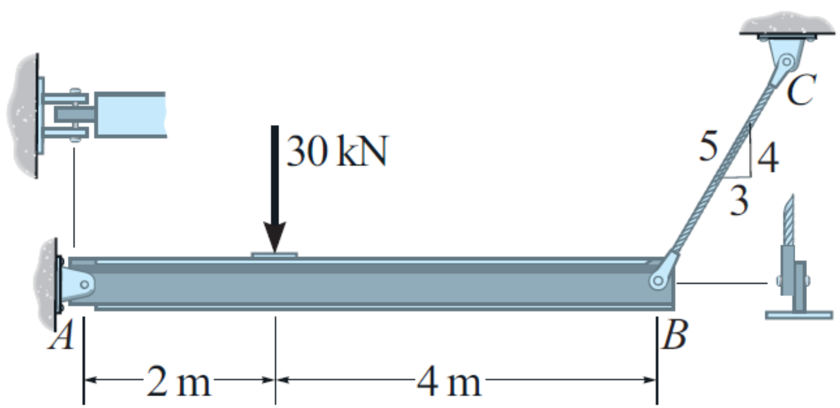


圖 1-21

例題1-10

求在 20 mm 直徑 *A* 點的銷與 30 mm 直徑 *B* 點的銷的平均剪應力。*A*、*B* 銷支撐圖 1-22a 所示的樑。



(a)

圖 1-22

例題1-10(續)

解

內載重　由圖 1-22b 梁的平衡，得到 A、B 銷的力。

$$\circlearrowright + \Sigma M_A = 0\;;\; F_B\left(\frac{4}{5}\right)(6\text{ m}) - 30\text{ kN}(2\text{ m}) = 0 \qquad F_B = 12.5\text{ kN}$$

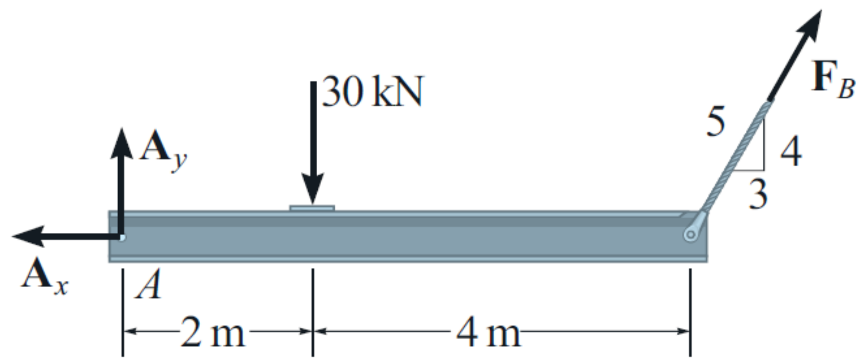
$$\overset{+}{\rightarrow}\ \Sigma F_x = 0\;;\quad (12.5\text{ kN})\left(\frac{3}{5}\right) - A_x = 0 \qquad A_x = 7.50\text{ kN}$$

$$+\uparrow\ \Sigma F_y = 0\;;\quad A_y + (12.5\text{ kN})\left(\frac{4}{5}\right) - 30\text{ kN} = 0 \qquad A_y = 20\text{ kN}$$

因此，作用於 A 銷的合力為

$$F_A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(7.50\text{ kN})^2 + (20\text{ kN})^2} = 21.36\text{ kN}$$

例題1-10(續)



(b)

圖 1-22

例題1-10(續)

A 銷用兩片固定的支承片支撐，A 銷中央段的自由體圖示於圖 1-22c，在樑與支承片上各有兩個剪力面。因此樑作用於銷上的力，由兩面的剪力承擔，這種情形稱為雙剪，即

$$V_A = \frac{F_A}{2} = \frac{21.36\,\text{kN}}{2} = 10.68\,\text{kN}$$

在圖 1-22a，注意 B 銷承受單剪，參考圖 1-22d 纜繩與樑間的截面，

$$V_B = F_B = 12.5\,\text{kN}$$

例題1-10(續)

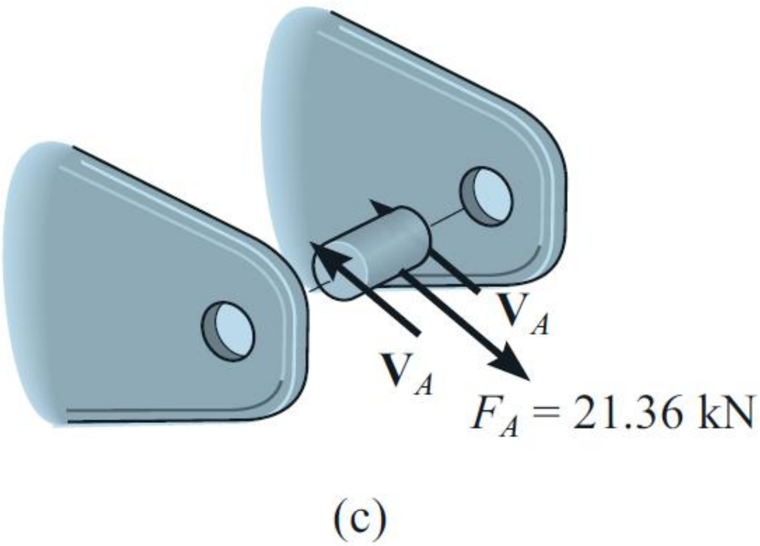
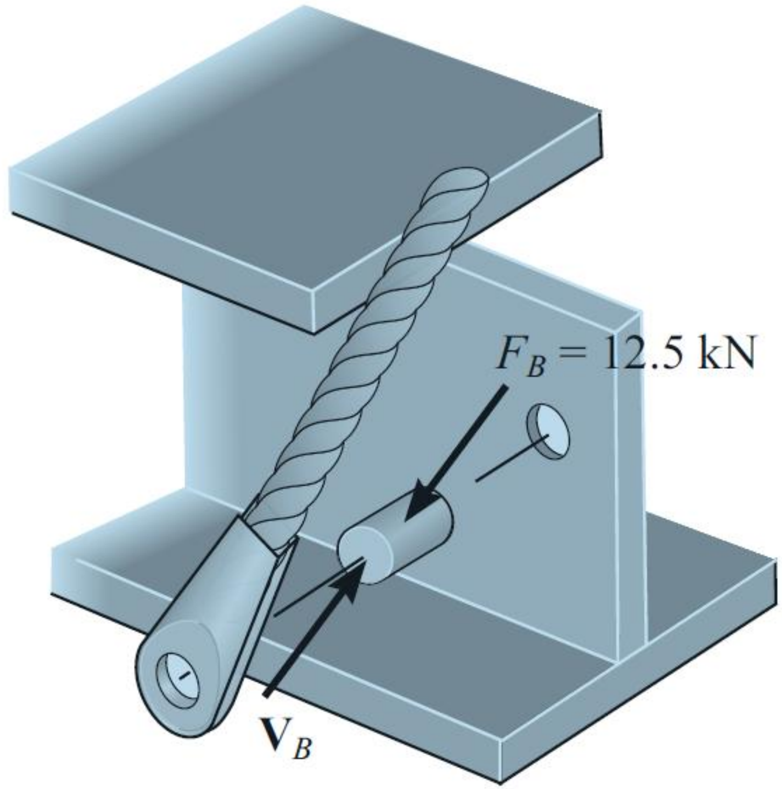


圖 1-22

例題1-10(續)



(d)

圖 1-22

例題1-10(續)

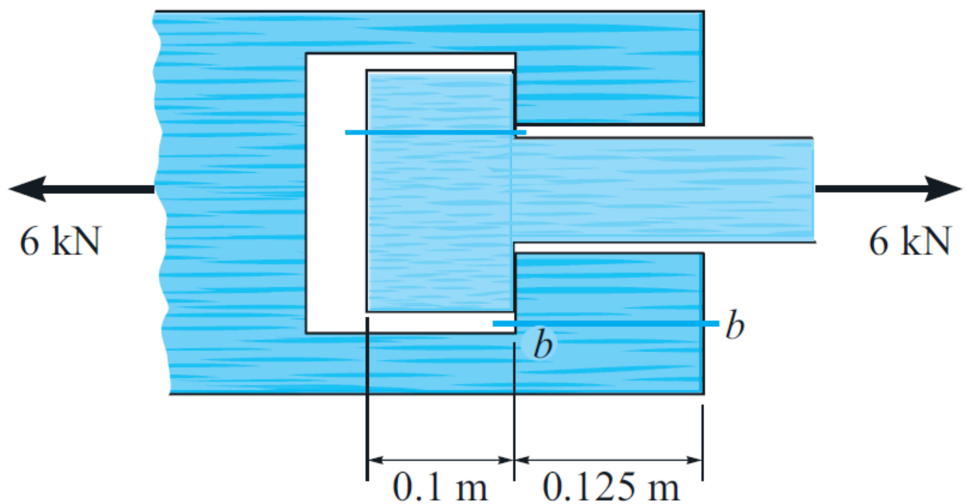
平均剪應力

$$(\tau_A)_{avg} = \frac{V_A}{A_A} = \frac{10.68(10^3)\,\text{N}}{\frac{\pi}{4}(0.02\,\text{m})^2} = 34.0\,\text{MPa} \quad \blacksquare$$

$$(\tau_B)_{avg} = \frac{V_B}{A_B} = \frac{12.5(10^3)\,\text{N}}{\frac{\pi}{4}(0.03\,\text{m})^2} = 17.7\,\text{MPa} \quad \blacksquare$$

例題1-11

若圖 1-23a 木製接頭的寬度為 150 mm，求沿 *a-a* 及 *b-b* 剪平面的平均剪應力。並在各平面上，用材料的元素表現應力狀態。



(a)

圖 1-23

例題1-11(續)

解

內載重　參考桿件的自由體圖，圖 1-23b，

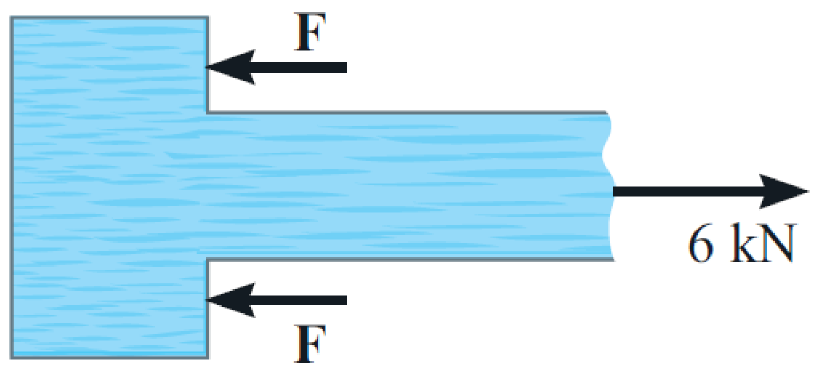
$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \quad 6\,\text{kN} - F - F = 0 \quad F = 3\,\text{kN}$$

考慮沿 *a*-*a* 與 *b*-*b* 截面段的平衡，如圖 1-23c 及圖 1-23d 所示。

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \quad V_a - 3\,\text{kN} = 0 \quad V_a = 3\,\text{kN}$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \quad 3\,\text{kN} - V_b = 0 \quad V_b = 3\,\text{kN}$$

例題1-11(續)



(b)

圖 1-23

例題1-11(續)

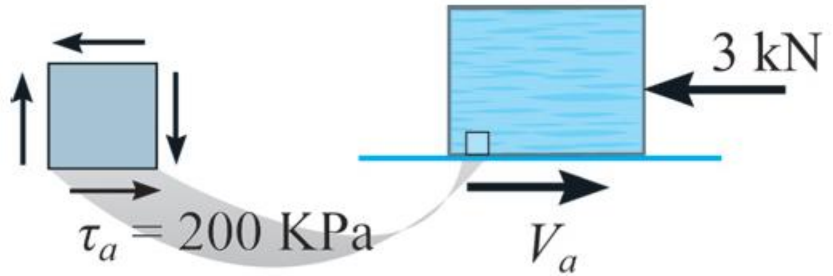
平均剪應力

$$(\tau_a)_{avg}=\frac{V_a}{A_a}=\frac{3(10^3\ \mathrm{N})}{(0.1\ \mathrm{m})(0.15\ \mathrm{m})}=200\ \mathrm{kPa} \quad \blacksquare$$

$$(\tau_b)_{avg}=\frac{V_b}{A_b}=\frac{3(10^3\ \mathrm{N})}{(0.125\ \mathrm{m})(0.15\ \mathrm{m})}=160\ \mathrm{kPa} \quad \blacksquare$$

在 *a*-*a* 與 *b*-*b* 截面元素的應力狀態，示於圖 1-23c 及圖 1-23d。

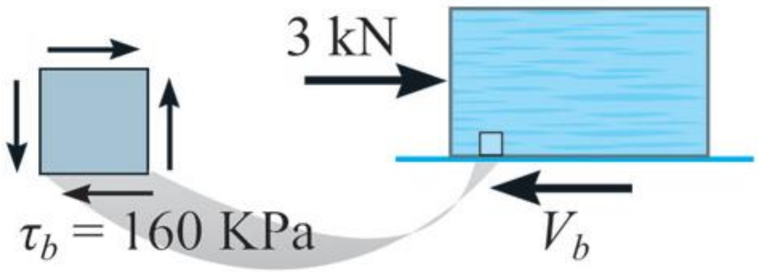
例題1-11(續)



(c)

圖 1-23

例題1-11(續)

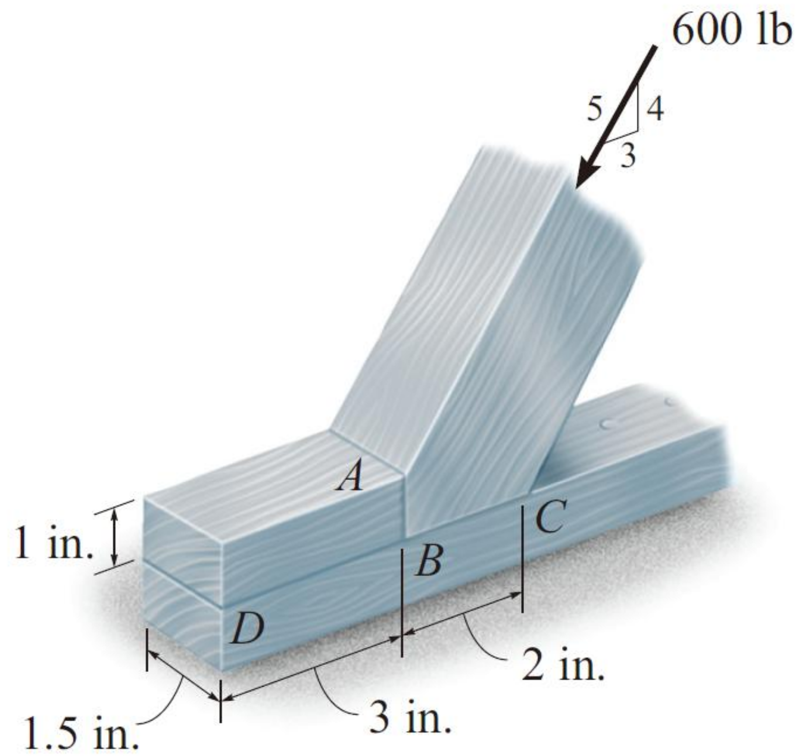


(d)

圖 1-23

例題1-12

圖 1-24a 所示斜桿承受一 600 lb 壓力。求沿光滑接觸面 *AB*、*BC* 之平均壓應力，及沿水平面 *DB* 上之平均剪應力。



(a)

圖 1-24

例題1-12(續)

解

內部合載重　斜桿的自由體圖如圖 1-24b 所示。作用於接觸面積之壓力為

$$\overset{+}{\rightarrow}\ \Sigma F_x = 0\text{；}\qquad F_{AB} - 600\text{ lb}\left(\frac{3}{5}\right) = 0 \qquad F_{AB} = 360\text{ lb}$$

$$+\uparrow\ \Sigma F_y = 0\text{；}\qquad F_{BC} - 600\text{ lb}\left(\frac{4}{5}\right) = 0 \qquad F_{BC} = 480\text{ lb}$$

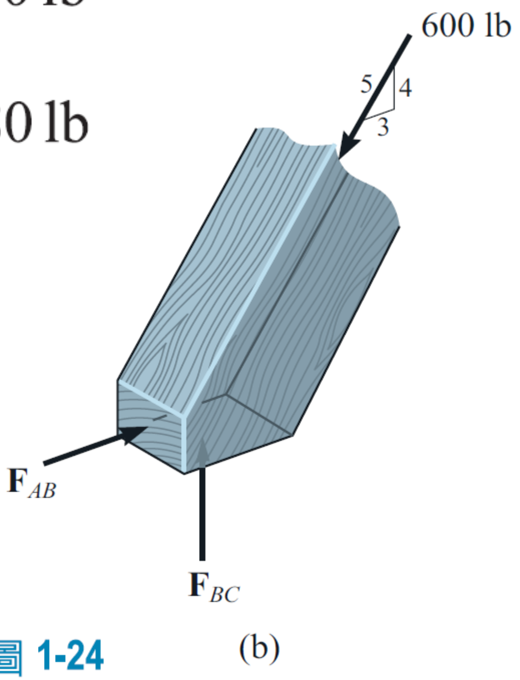
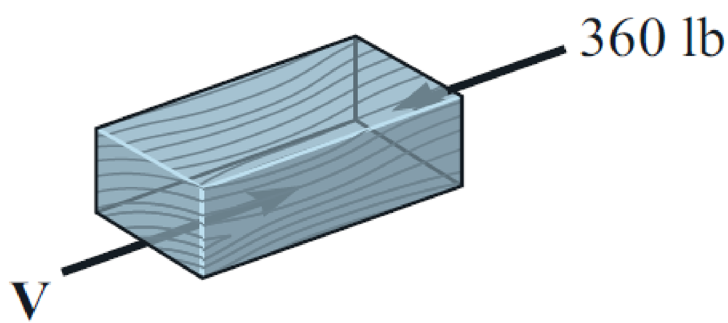


圖 1-24

例題1-12(續)

另外，底部桿件之上半部分的自由體圖如底桿的 ABD 段頂(圖 1-24c)，作用於切割的水平面 DB 上之剪力為

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0\text{；} \qquad V = 360\ \text{lb}$$



(c)

圖 1-24

例題1-12(續)

平均應力　沿斜桿水平及垂直面的平均壓應力為

$$\sigma_{AB} = \frac{360\ \text{lb}}{(1\ \text{in.})(1.5\ \text{in.})} = 240\ \text{psi}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{480\ \text{lb}}{(2\ \text{in.})(1.5\ \text{in.})} = 160\ \text{psi}$$

應力分佈示於圖 1-24d。

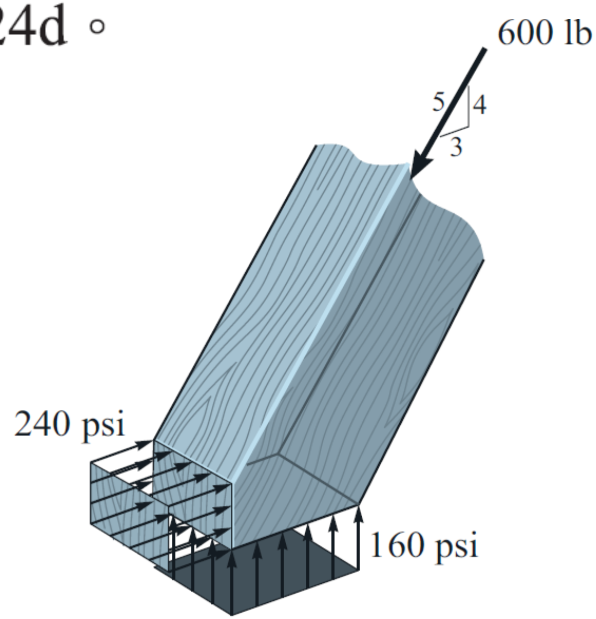


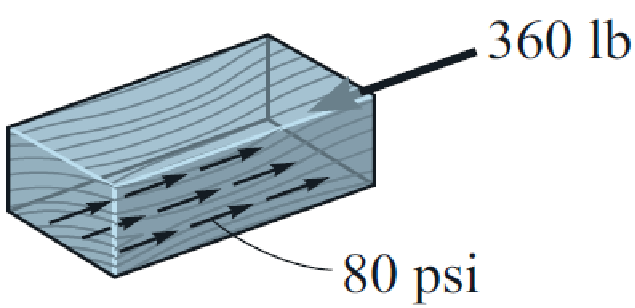
圖 1-24　(d)

例題1-12(續)

作用於水平面 *EDB* 之平均剪應力

$$\tau_{\text{avg}} = \frac{360\ \text{lb}}{(3\ \text{in.})(1.5\ \text{in.})} = 80\ \text{psi} \qquad \blacksquare$$

應力分佈於整個切割面上，如圖 1-24e。



(e)

圖 1-24

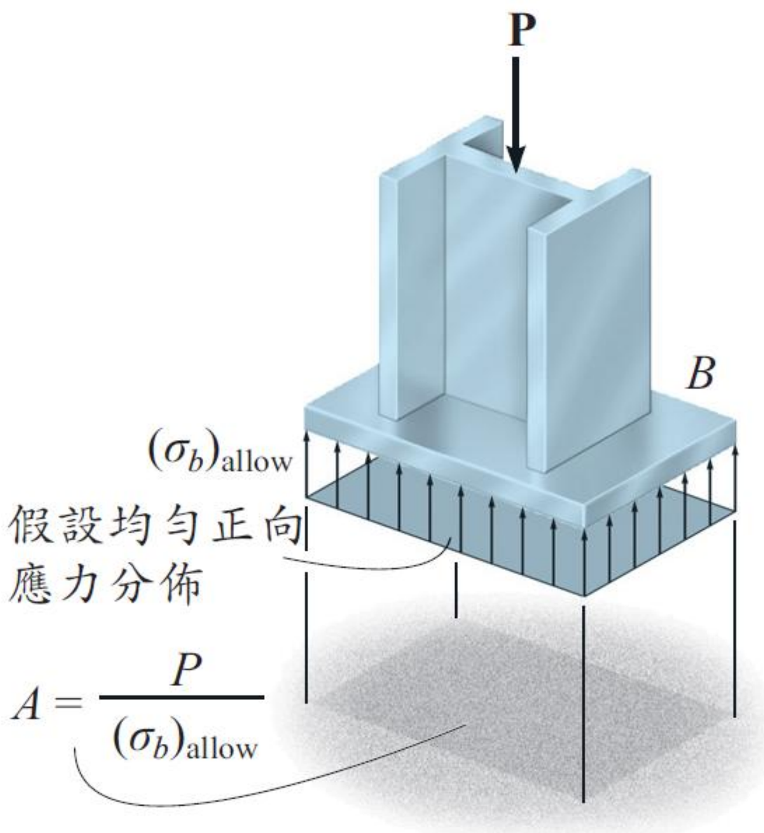
容許應力

- 一種規定桿件容許載重的方法是利用一項稱為安全因素的數值，安全係數 (factor of safety, F.S.) 是破壞載重F_{fail}與容許載重F_{allow}的比值。

$$\boxed{\text{F.S.} = \frac{F_{\text{fail}}}{F_{\text{allow}}}} \tag{1-8}$$

$$\text{F.S.} = \frac{\sigma_{\text{fail}}}{\sigma_{\text{allow}}} \tag{1-9}$$

$$\text{F.S.} = \frac{\tau_{\text{fail}}}{\tau_{\text{allow}}} \tag{1-10}$$



利用混凝土的容許支承應力，求柱基板 B 的面積。

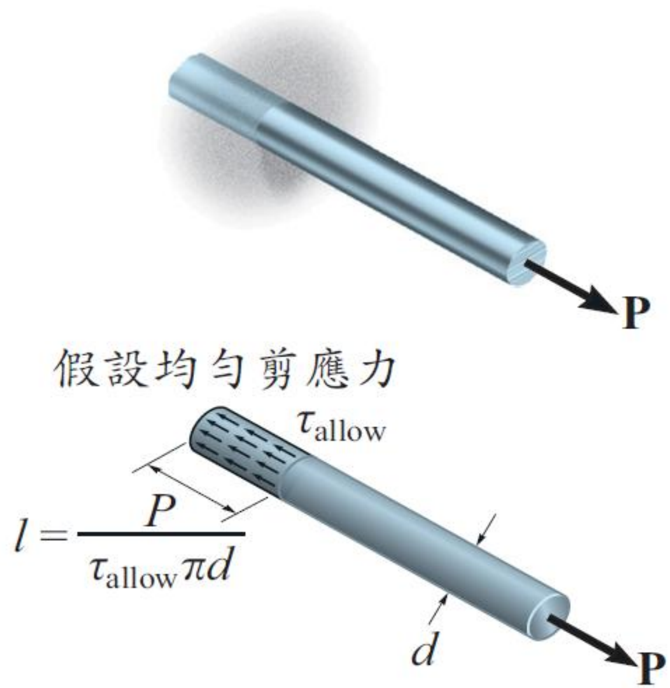
簡單接頭的設計

- 藉由對材料行為做簡化假設，方程式$\sigma = P/A$及$\tau_{avg} = V/A$常可用來分析或設計簡單接頭或機械元件。特別是若桿件在某截面承受正向力，此截面所需面積可由下式求得

$$A = \frac{P}{\sigma_{allow}} \qquad (1\text{-}11)$$

- 若此截面承受剪力，則其所需面積為

$$A = \frac{V}{\tau_{allow}} \qquad (1\text{-}12)$$



埋入混凝土的桿長 l，可考慮應用膠黏的容許剪應力。

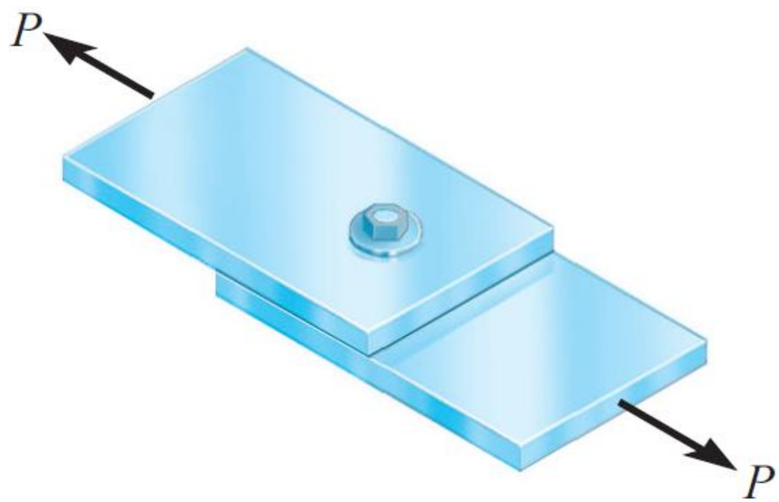


圖 1-25 搭接的螺栓面積是由板間的最大剪應力決定

當設計用以移動重載重的起重機及纜繩時，必須考慮適當之安全係數。

例題1-13

一控制臂受到圖 1-26a 所示的載重作用。若鋼的容許剪應力為 $\tau_{allow}=8$ ksi，求 C 點所需鋼銷的直徑到 $\frac{1}{4}$ in.。

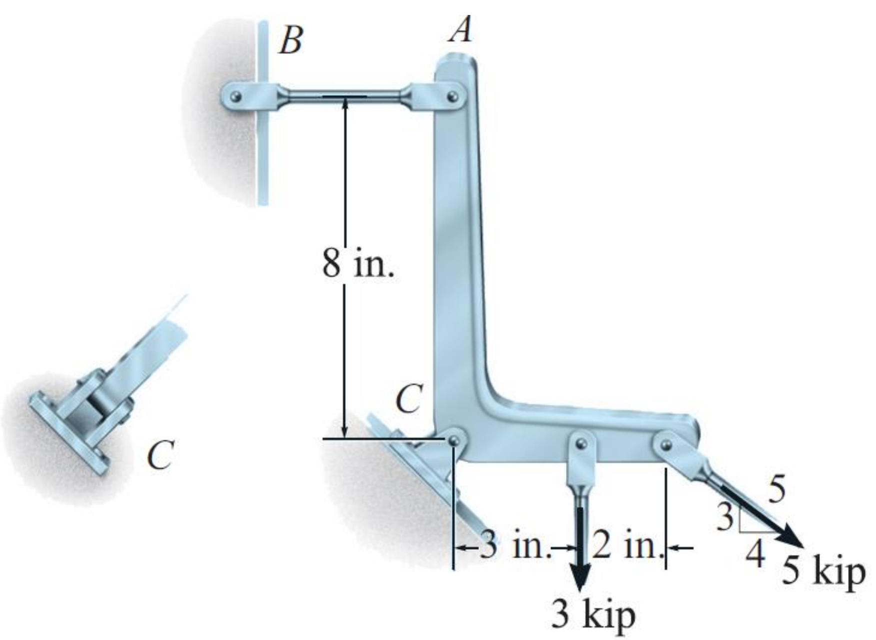


圖 1-26

例題1-13(續)

解

内剪力 圖 1-26b 所示為臂的自由體圖，由平衡得到

$$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0\text{；}\quad F_{AB}(8\text{ in.}) - 3\text{ kip}(3\text{ in.}) - 5\text{ kip}\left(\frac{3}{5}\right)(5\text{ in.}) = 0$$

$$F_{AB} = 3\text{ kip}$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\ \Sigma F_x = 0\text{；}\quad -3\text{ kip} - C_x + 5\text{ kip}\left(\frac{4}{5}\right) = 0 \quad C_x = 1\text{ kip}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0\text{；}\quad C_y - 3\text{ kip} - 5\text{ kip}\left(\frac{3}{5}\right) = 0 \quad C_y = 6\text{ kip}$$

例題1-13(續)

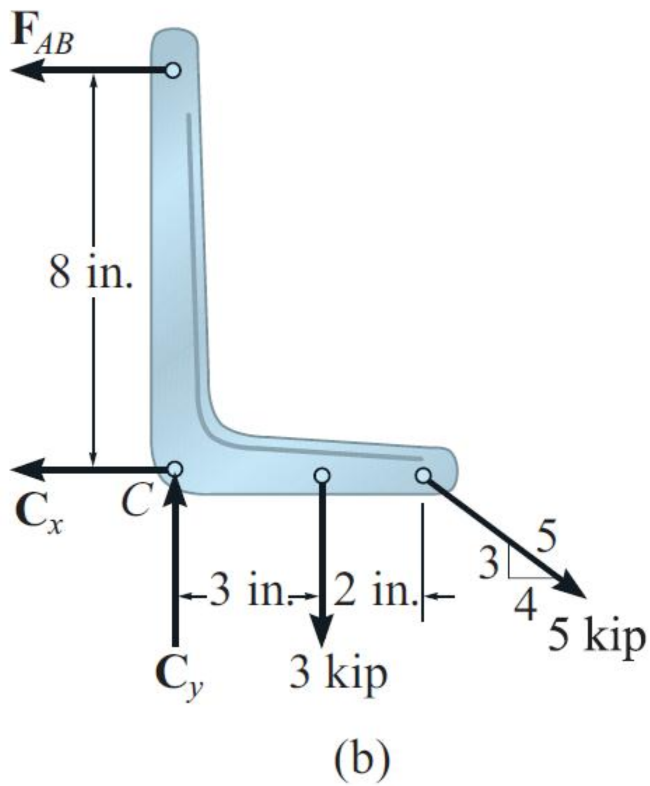


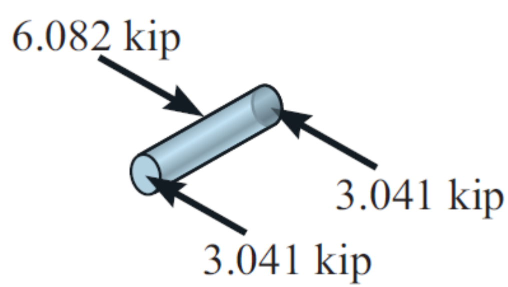
圖 1-26

例題1-13(續)

C 銷抵抗 C 點的合力，則

$$F_C = \sqrt{(1\text{ kip})^2 + (6\text{ kip})^2} = 6.082\text{ kip}$$

由於銷受到雙剪力作用，3.041 kip 的剪力作用於臂與銷支撐片間的橫截面面積，圖 1.26c。



在 C 的銷

(c)

圖 1-26

例題1-13(續)

所需面積　因此

$$A=\frac{V}{\tau_{\text{alllow}}}=\frac{3.041\ \text{kip}}{8\ \text{kip/in.}^2}=0.3802\ \text{in.}^2$$

$$\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2=0.3802\ \text{in.}^2 \qquad d=0.696\ \text{in.}$$

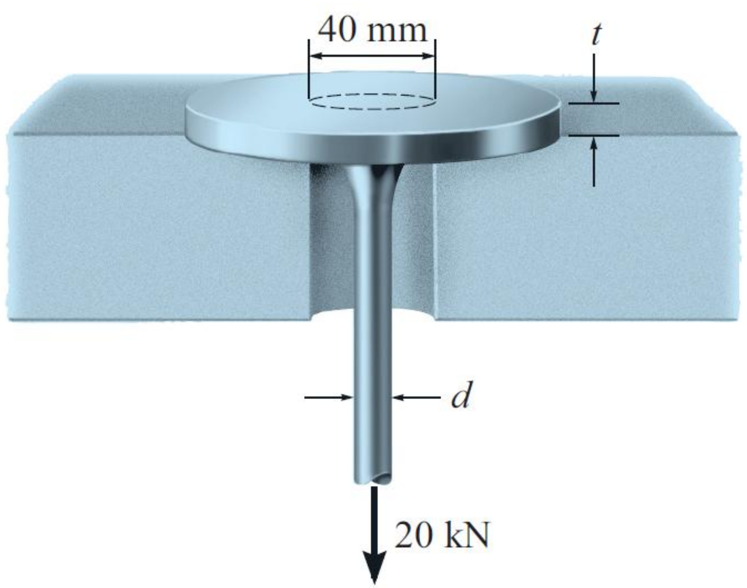
選用銷的直徑為

$$d=\frac{3}{4}\ \text{in.}=0.750\ \text{in.}$$

■

例題1-14

懸吊桿在一端以一固定連結的圓盤支撐如圖 1-27a 所示。若桿件穿過一直徑 40 mm 之孔，求桿件所需最小直徑及圓盤最小厚度，以支撐 20 kN 載重。桿件的容許正向應力 $\sigma_{allow} = 60$ MPa，圓盤的容許剪應力 $\tau_{allow} = 35$ MPa。



(a)

圖 1-27

例題1-14(續)

解

桿件直徑　由觀察得知，桿件軸向力為 20 kN。故此桿所需橫截面積為

$$A=\frac{P}{\sigma_{\text{allow}}}=\frac{20(10^3)\,\text{N}}{60(10^6)\,\text{N/m}^2}=0.3333(10^{-3})\,\text{m}^2$$

因此

$$A=\pi\left(\frac{d^2}{4}\right)=0.3333(10^{-2})\,\text{m}^2$$

$$d=0.0206\,\text{m}=20.6\,\text{mm}$$

■

例題1-14(續)

圓盤厚度　如圖 1-27b 自由體圖所示，圓環橫截面上的材料，必能抵抗剪應力以防止圓環穿過洞孔。若假設剪應力在截面積上均勻分佈，則因 $V = 20\text{ kN}$，得

$$A = \frac{V}{\tau_{\text{allow}}} = \frac{20(10^3)\text{ N}}{35(10^6)\text{ N/m}^2} = 0.5714(10^{-3})\text{ m}^2$$

由於截面積 $A = 2\pi(0.02\text{ m})(t)$，圓盤所需厚度為

$$t = \frac{0.5714(10^{-3})\text{ m}^2}{2\pi(0.02\text{ m})} = 4.55(10^{-3})\text{ m} = 4.55\text{ mm}$$

■

例題1-14(續)

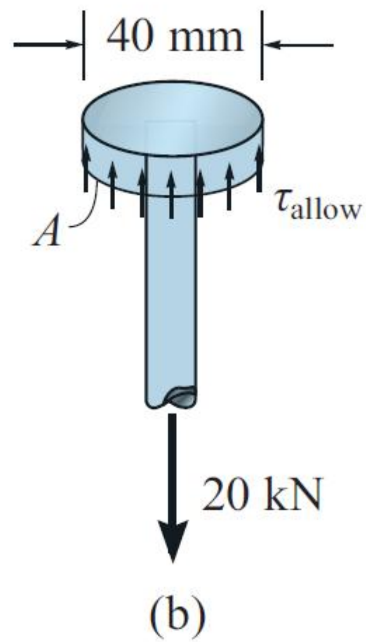


圖 1-27

例題1-15

一軸向載重作用於圖 1-28a 所示的軸上，在 C 處被軸環阻抗，此軸環固定於軸上並位於在 B 軸承之右側。求 P 之最大值，以使 E 及 F 處兩個軸向力，對在 C 的軸環所產生的應力，不超過容許支承應力 $(\sigma_b)_{allow} = 75$ MPa，且軸的平均正向應力，不超過容許拉應力 $(\sigma_t)_{allow} = 55$ MPa。

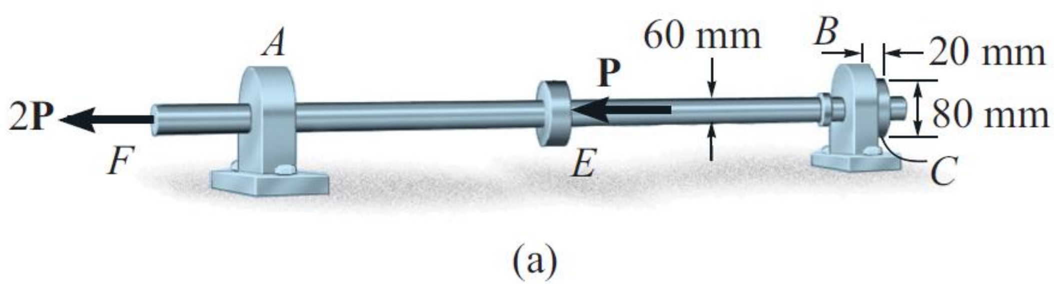


圖 1-28

例題1-15(續)

解

為解本題須對各種可能的破壞情況求出 P 值，再選擇最小者，何故？

正向應力 使用截面法，軸上 FE 區段的軸向載重為 $2P$，而最大軸向載重 $3P$ 則發生於 EC 區段，如圖 1-28b。內部合載重的變化清楚地示於圖 1-28c 的正向力圖。由於整個軸的截面積為常數，區段 EC 承受最大平均正向應力。應用 (1-11) 式，得

$$\sigma_{\text{allow}} = \frac{P}{A}; \qquad 55(10^6)\,\text{N/m}^2 = \frac{3P}{\pi(0.03\,\text{m})^2} \qquad P = 51.8\,\text{kN}$$

例題1-15(續)

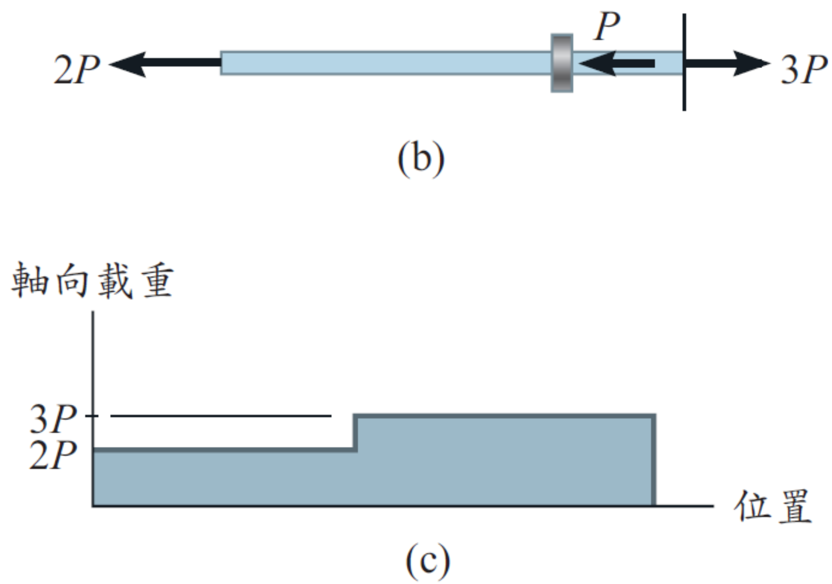


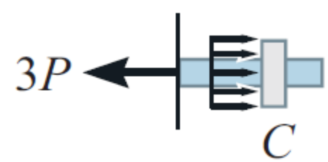
圖 1-28

例題1-15(續)

支承應力　圖 1-28d 所示的自由體圖，在 C 的軸環需承受 $3P$ 載重，所作用承載面積為 $A_b = [\pi(0.04\text{ m})^2 - \pi(0.03\text{m})^2] = 2.199(10^{-3})\text{ m}^2$。故

$$A = \frac{P}{\sigma_{\text{allow}}}; \qquad 75(10^6)\text{ N/m}^2 = \frac{3P}{2.199(10^{-3})\text{ m}^2} \qquad P = 55.0\text{ kN}$$

由比較顯示，可施於軸之最大載重為 $P = 51.8\text{ kN}$，此乃因任意較此為大的載重將導致軸超出其容許正向應力。

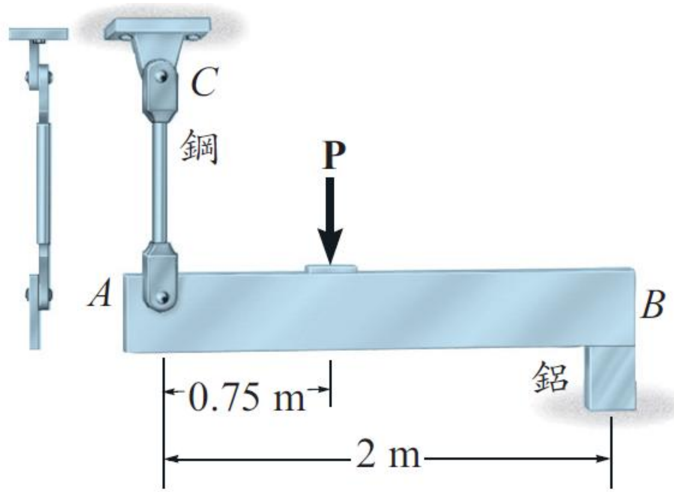


(d)

圖 1-28

例題1-16

圖 1-29a 所示的剛性桿 AB 由一直徑 20 mm 的鋼桿 AC 及一截面積 1800 mm^2 的鋁塊所支撐。A、C 處直徑 18 mm 的銷承受單剪力。若鋼及鋁之破壞應力分別為 $(\sigma_{st})_{fail} = 680$ MPa 及 $(\sigma_{al})_{fail} = 70$ MPa，且各銷破壞剪應力為 $\tau_{fail} = 900$ MPa，求可施於桿件之最大載重 P。使用安全係數 F.S. = 2。



(a)

圖 1-29

例題1-16(續)

解

應用 (1-9) 式及 (1-10) 式，容許應力為

$$(\sigma_{st})_{allow} = \frac{(\sigma_{st})_{fail}}{\text{F.S.}} = \frac{680\ \text{MPa}}{2} = 340\ \text{MPa}$$

$$(\sigma_{al})_{allow} = \frac{(\sigma_{al})_{fail}}{\text{F.S.}} = \frac{70\ \text{MPa}}{2} = 35\ \text{MPa}$$

$$\tau_{allow} = \frac{\tau_{fail}}{\text{F.S.}} = \frac{900\ \text{MPa}}{2} = 450\ \text{MPa}$$

桿件的自由體圖示於圖 1-29b，有三未知數。應用平衡方程式以便以施加載重 P 來表示 F_{AC} 及 F_B；得

$$\circlearrowright + \Sigma M_B = 0; \qquad P(1.25\ \text{m}) - F_{AC}(2\ \text{m}) = 0 \qquad (1)$$

$$\circlearrowright + \Sigma M_A = 0; \qquad F_B(2\ \text{m}) - P(0.75\ \text{m}) = 0 \qquad (2)$$

分別計算在鋼桿、鋁塊及銷產生容許應力之 P 值。

例題1-16(續)

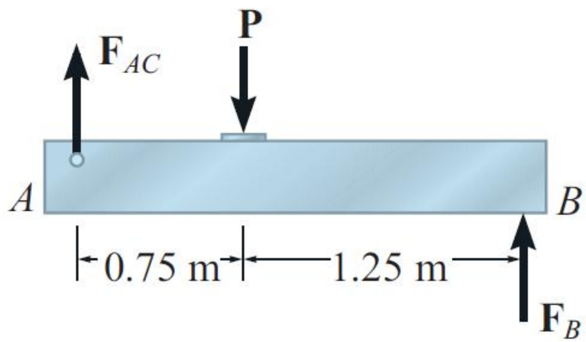


圖 1-29

例題1-16(續)

鋼桿 *AC* 此須

$$F_{AC} = (\sigma_{\text{st}})_{\text{allow}}(A_{AC}) = 340(10^6)\,\text{N/m}^2\,[\pi(0.01\,\text{m})^2] = 106.8\,\text{kN}$$

使用 (1) 式 $$P = \frac{(106.8\,\text{kN})(2\,\text{m})}{1.25\,\text{m}} = 171\,\text{kN}$$

鋁塊 *B* 在此情況中

$$F_B = (\sigma_{\text{al}})_{\text{allow}}\,A_B = 35(10^6)\,\text{N/m}^2[1800\,\text{mm}^2(10^{-6})\,\text{m}^2/\text{mm}^2] = 63.0\,\text{kN}$$

使用 (2) 式 $$P = \frac{(63.0\,\text{kN}(2\,\text{m})}{0.75\,\text{m}} = 168\,\text{kN}$$

例題1-16(續)

銷 A 或 C　在此

$$V = F_{AC} = \tau_{\text{allow}} A = 450(10^6)\,\text{N}/\text{m}^2[\pi(0.009\,\text{m})^2] = 114.5\,\text{kN}$$

由 (1) 式
$$P = \frac{114.5\,\text{kN}(2\,\text{m})}{1.25\,\text{m}} = 183\,\text{kN}$$

經由比較顯示，當 P 達其最小值 (168 kN) 鋁塊將產生容許正向應力。故

$$P = 168\,\text{kN}$$

■