

# 第6章 變異數分析

# 6-1 變異數分析簡介

- 當統計分析中需要比較來自兩個母體的樣本，其平均值是否具有顯著差異時，我們通常會應用 T 檢定。
- 例如，欲比較男性和女性的平均年薪有無差異時，其虛無假設為：兩個母體各自的平均值之間無顯著差異。
- 我們用從兩個母體中，抽出隨機樣本，然後計算隨機樣本的平均值以作為對兩個母體的估計，然後在考慮抽樣誤差的條件下進行比較，以決定接受或拒絕無顯著差異之假設。

- 但如果在研究中，同時具有多個母體時（3個以上），那麼如果還是應用T檢定時，則需要兩兩加以比較，如此將顯得十分繁瑣，而且其誤差也會逐次擴大。
- 例如，若某個實驗有四組獨立樣本平均數，那麼如果要使用T檢定來進行兩兩比較時，則必須作六次（ $C_2^4 = 6$ ）平均數的假設檢定。
- 若每個檢定的 $\alpha$ 為0.05，則正確的機率為0.95，因此六次檢定全部正確的機率為0.735 ( $0.95^6$ )，則整個實驗的錯誤率為0.265 ( $1-0.735$ )。
- 由此不難發現誤差擴大約有五倍（ $0.265/0.05$ ）之多。
- 因此，我們往往應用綜合性更強的變異數分析（Analysis of Variance，簡稱為ANOVA）方法取而代之。

- 變異數分析將提出問題的方式進行了改變，其統計假設為這些母體的平均值中至少有一個與其他母體的平均值間存在顯著差異。因此其虛無假設為：

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$$

$$H_1 : \mu_1、\mu_2、\cdots、\mu_k \text{不全相等}$$

式中， $\mu$ 代表母體平均數，其下標 $k$ 表示分組數。

- 例如:在農作物種植、成長的過程中，研究人員需要對影響農作物產量的各種因素進行定量或定性的研究，並在此基礎上尋找最佳的種植組合方案。
- 研究人員首先應廣泛分析影響農作物產量的各種因素，如品種、施肥量、地區特性等因素。
- 在掌握了關鍵因素，如品種、施肥量等因素以後，還需要對不同等級的品種、不同水準的施肥量等進行對比分析，研究到底是那些品種的產量高，施肥量究竟要多少最合適，那些品種與那種施肥量搭配起來的效果最佳等。
- 在這些分析研究的基礎上，人們就可以計算出各個組合種植方案的成本和收益，並選擇最合適的種植方案，

- 例如:在制定某商品之廣告宣傳策略時，通常不同組合方案所獲得的廣告效果是不一樣的。
- 一般而言，廣告效果會受到廣告形式、地區規模、選擇檔期、播放時段、播放頻率等因素的影響。
- 行銷部門應該要去研究在影響廣告效果的眾多因素中，那些因素才是主要的，它們產生影響程度有多大，那些因素的組合搭配是最具效果等。

## 進行變異數分析時所涉及的相關名詞：

- 在變異數分析裡，上述例子中的農作物產量、廣告效果等稱為**觀測變量**；
- 品種、施肥量、廣告型態、地區規模、選擇檔期等影響因素稱為**控制變量（或稱因素）**；
- 控制變量的不同類別（如甲品種、乙品種；10公斤化學肥料、20公斤化學肥料、30公斤化學肥料；電視廣告、廣播廣告；小規模地區、中規模地區、大規模地區等）則稱為**控制變量的不同水準**。

## 6-2 變異數分析基本原理

- 變異數分析認為導致觀測變量值變化的因素有兩類：
  - ☞ 第一類是控制變量不同水準所產生的影響
  - ☞ 第二類是隨機因素所產生的影響
- 在此所謂隨機因素是指那些人為很難控制的因素，主要指試驗過程中的抽樣誤差。

- 如果觀測變量值在某控制變量的各個水準中出現了明顯變化，則認為該控制變量是影響觀測變量的主要因素。
- 如果觀測變量值在某控制變量的各個水準中沒有出現明顯變化，則認為該控制變量沒有對觀測變量產生重要影響，其資料的變化是抽樣誤差造成的。

## 6-3 單因子變異數分析的基本概念

- 單因子變異數分析就是一維的變異數分析，是檢定在單一控制變量的不同水準影響下，某觀測變量的平均值是否產生顯著差異的問題。
- 如果「各種」不同的水準間具有顯著差異，則表示這個控制變量對觀察變量是有顯著影響的；也就是說，控制變量的不同水準會影響到觀察變量的取值。

## 6-4 單因子變異數分析的基本步驟

- 步驟1：設定虛無假設
- 步驟2：選擇檢定統計量
- 步驟3：計算檢定統計量的值和機率 $p$ 值
- 步驟4：制訂顯著水準 $\alpha$ ，並作出決策

# 步驟1：設定虛無假設

- 單因子變異數分析的虛無假設 $H_0$ 為：在控制變量的不同水準下，觀察變量各母體的平均值沒有顯著差異，記為：

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$$

$$H_1 : \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k \text{ 不全相等}$$

式中， $\mu$ 代表母體平均數，其下標 $k$ 表示控制變量的水準數。

此虛無假設即意味著：控制變量之不同水準，並沒有對觀察變量產生顯著的影響。

## 步驟2：選擇檢定統計量

- 變異數分析所使用的檢定統計量是F統計量，其數學定義為：

$$F = \frac{SSA/(k - 1)}{SSE/(n - k)} = \frac{MSA}{MSE}$$

其中，n為總樣本數，k為控制變量之水準數，k - 1和n - k是分別為SSA和SSE的自由度；MSA是組間均方和，MSE是組內均方和。

## 步驟3：計算檢定統計量的值和機率p值

- 此步驟的目的在於：計算檢定統計量的值和其所相對應的機率p值（顯著性）。
- SPSS會自動將相關資料代入F統計量中，以計算出F統計量的值和其所相對應的機率p值。
- 如果控制變量對觀察變量造成了顯著影響，那麼觀察變量的總離差中，控制變量影響所佔的比例相對於隨機因素必然較大，所以F值會顯著大於1；反之，如果控制變量沒有對觀察變量造成顯著影響，則觀察變量的離差應可歸因於隨機因素所造成的，故F值會接近於1。

## 步驟4：制訂顯著水準 $\alpha$ ，並作出決策

- 根據研究者所制定的顯著水準 $\alpha$ ，然後與檢定統計量的機率 $p$ 值作比較。如果機率 $p$ 值小於顯著水準 $\alpha$ ，則應拒絕虛無假設，所以將認為在控制變量的各個不同水準下，觀察變量各母體的平均值會存在顯著差異。意即，控制變量的不同水準確實會對觀察變量產生了顯著影響；反之，如果機率 $p$ 值大於顯著性水準 $\alpha$ 時，則不應拒絕虛無假設，而應認為在控制變量之各個不同水準下，觀察變量各母體的平均值無顯著差異。意即，控制變量的不同水準對觀察變量沒有產生顯著影響。

## ■ 範例6-1 (ex6-1.sav)

某燈泡廠使用了四種不同的配料方案來製成燈絲，進而生產了四批燈泡。現於每批燈泡中，隨機地抽取了若干個燈泡，以測其使用壽命（單位：小時），資料列於表6-1中。現在想知道，對於這四種燈絲所生產的燈泡，其使用壽命有無顯著差異。

表 6-1 燈泡使用壽命

燈線 \ 燈泡	1	2	3	4	5	6	7	8
甲	1600	1610	1650	1680	1700	1700	1780	
乙	1500	1540	1400	1600	1550			
丙	1640	1550	1600	1620	1640	1600	1740	1800
丁	1510	1520	1530	1570	1640	1680		

$H_0: \mu_{\text{甲}} = \mu_{\text{乙}} = \mu_{\text{丙}} = \mu_{\text{丁}}$ ； $\mu$ 代表燈泡使用壽命的平均值。

或

$H_0$ ：燈絲配方種類不會影響燈泡的平均使用壽命。

# 輸出結果及分析

- 執行【單因變異數分析】功能後所產生的三個報表分別為ANOVA表，變異數同質性檢定表與 Post Hoc 檢定表。
- 首先須觀察 ANOVA 表，若 ANOVA 表示顯著，這時就須進行事後檢定。
- 檢定前須觀察變異數同質性檢定表，若變異數同質性檢定表顯示不顯著時(顯著性大於0.05)，則研究者只能使用屬於【假設相同的變異數】的檢定方法進行事後比較(本例題中，使用 Scheffe 法)。否則，就應該使用屬於【未假設相同的變異數】的檢定方法進行事後比較(本例題中，使用 Tamhane' s T2 檢定)。

## 一. ANOVA表

表 6-2 單因子變異數分析結果

	平方和	自由度	平均平方和	F	顯著性
組間	90299.533	3	30099.844	5.685	.005
組內	116488.929	22	5294.951		
總和	206788.462	25			

- 第一欄：指出了變異來源，包含組間變異、組內變異與總變異。
- 第二欄【平方和】：代表離差平方和。因此，組間離差平方和為90299.533，組內離差平方和為116488.929，總離差平方和為206788.462，它是組間離差平方和與組內離差平方和相加而得。
- 第三欄【自由度】：代表自由度，組間自由度為3（水準數-1），總自由度為25（總樣本數-1），組內自由度為22，它是總自由度和組間自由度之差。
- 第四欄【平均平方和】：代表均方和，即離差平方和除以自由度，組間均方和是30099.844，組內均方和是5294.951。
- 第五欄【F】：代表F統計量，這是F統計量的值，其計算公式為組間均方和除以組內均方和，用來檢定控制變量對觀測變量影響程度之顯著性，如果不顯著則表示控制變量對觀測變量的變化沒有解釋能力，在此F值為5.685。
- 第六欄【顯著性】：代表顯著值，這是F統計量的機率p值，即當F值為5.685，自由度為（3, 22）時的機率p值為0.005。

- 由於顯著值  $0.005$  小於  $0.05$ ，所以在信賴水準  $0.95$  下不能接受虛無假設，因此認為四種燈絲生產的燈泡，其平均使用壽命具有顯著差異；也就是說，燈泡的平均使用壽命會受到燈絲配方種類的影響。

## 二. 變異數同質性檢定表

- 變異數同質性檢定的虛無假設為：

各燈絲之使用壽命的變異數相等，記為：

$H_0 : \sigma_{甲}^2 = \sigma_{乙}^2 = \sigma_{丙}^2 = \sigma_{丁}^2$ ； $\sigma^2$ 代表燈泡使用壽命的變異數。

表 6-3 為變異數同質性檢定表

Levene統計量	分子自由度	分母自由度	顯著性
.149	3	22	.929

- 表6-3為變異數同質性檢定之結果，Levene統計量為0.149，顯著性0.929大於0.05，因此須接受虛無假設，即確認各燈絲之平均使用壽命的變異數相等。

### 三. Post Hoc檢定

#### 1. 多重比較表

表 6-4 多重比較表

(I)燈絲 (J)燈絲		平均差異 (I-J)	標準誤	顯著性	95%的信賴區間		
					下界	上界	
Scheffe法	甲	乙	156.286*	42.608	.013	27.42	285.15
		丙	25.536	37.660	.926	-88.37	139.44
		丁	99.286	40.483	.413	-23.16	221.73
	乙	甲	-156.286*	42.608	.013	-285.15	-27.42
		丙	-130.750*	41.483	.039	-256.21	-5.29
		丁	-57.000	44.062	.648	-190.26	76.26
	丙	甲	-25.536	37.660	.926	-139.44	88.37
		乙	130.750*	41.483	.039	5.29	256.21
		丁	73.750	39.298	.342	-45.11	192.61
	丁	甲	-99.286	40.483	.143	-221.73	23.16
		乙	57.000	44.062	.648	-76.26	190.26
		丙	-73.750	39.298	.342	-192.61	45.11
Tamhane檢定	甲	乙	156.286*	40.819	.033	12.64	299.93
		丙	25.536	37.093	.985	-89.67	140.74
		丁	99.286	36.885	.127	-20.79	219.36

可以完全不予理會

表 6-4 多重比較表 (續)

(I)燈絲 (J)燈絲		平均差異 (I-J)	標準誤	顯著性	95%的信賴區間	
					下界	上界
乙	甲	-156.286*	40.819	.033	-299.93	-12.64
	丙	-130.750	44.246	.090	-278.03	16.53
	丁	-57.000	44.072	.792	-207.57	93.57
丙	甲	-25.536	37.093	.985	-140.74	89.67
	乙	130.750	44.246	.090	-16.53	287.03
	丁	73.750	40.645	.452	-54.55	202.05
丁	甲	-99.286	36.885	.127	-219.36	20.79
	乙	57.000	44.072	.792	-93.57	207.57
	丙	-73.750	40.645	.452	-202.05	54.55

- 首先觀察多重比較表，如表 6-4 所示。這表格很長，分成兩部分，上半部屬 Scheffe 法，下半部則屬 Tamhane 's T2 檢定。
- 由於已確認變異數具有同質性，因此有關下半部 Tamhane 's T2 檢定可以完全不予理會。
- 在 Scheffe 法中，四種燈絲輪流兩兩比較並檢定，因此共進行了 12 次比較並檢定。研究者須逐次觀察，才能比較出四種燈絲之使用壽命的大小關係。
- 首先。不顯著的部分可認為沒有差異，可跳過不理，只須看表 6-4 的第四欄【平均差異】具顯著差異(有\*號)的部分即可。具顯著差異的狀況彙整如下：

■甲-乙屬正且顯著，因此可推論甲 > 乙；

乙-甲屬負且顯著，因此可推論乙 < 甲；

乙-丙屬負顯現著，因此可推論乙 < 丙

丙-乙屬負顯現著，因此可推論丙 > 乙

因此可以容易得出結論：甲 = 丙 > 乙，或記為  
甲，丙 > 乙。

## 2. 同質子集

同質子集中，會將不同水準下的觀測變量平均值分成數個組別，根據分組狀況，就可判斷各水準的差異狀況。

		使用壽命		
燈絲		個數	alpha = 0.05 的子集	
			1	2
Scheffe 法 <sup>a, b</sup>	乙	5	1518.00	
	丁	6	1575.00	1575.00
	丙	8		1648.75
	甲	7		1674.29
	顯著性			.595

顯示的是同質子集中組別的平均數。

a. 使用調和平均數樣本大小 = 6.304。

b. 組別大小不相等。將使用組別大小的調和平均數。不保證型 I 的誤差水準。

總結：甲, 丙 > 乙

# 總結

- 本範例經單因子變異數分析後，由於 F 值為 5.685、顯著值 0.005 小於 0.05，所以在信賴水準 0.95 下不能接受虛無假設。也就是說，由四種燈絲所產生的燈泡，其平均使用壽命具有顯著差異，亦即燈泡的平均使用壽命會受到燈絲種類影響。在此有差異之情況下，進行事後比較可發現使用甲與丙燈絲所生產的燈泡，其平均使用壽命顯著大於乙燈絲，因此建議生產廠商可考慮使用甲或丙燈絲生產燈泡，以提高燈泡的平均使用壽命。

## ■ 範例6-2

∞ 參考【品牌形象、知覺價值與品牌忠誠度之關係】之原始問卷，並開啟ex6-2.sav，由於研究的需要，須將「年齡」欄位依下列規則，重新編碼成新變數「年齡層」。

30歲以下：改稱為青年，其數值代碼為 1

31~50歲：改稱為壯年，其數值代碼為 2

51歲以上：改稱為老年，其數值代碼為 3

試問各年齡層的受訪者對品牌形象之整體性認知是否具有差異性？

∞ 此檢定的虛無假設為：

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ ； $\mu$ 代表「品牌形象之整體性認知」的平均值。

或

$H_0$ ：消費者對「品牌形象之整體性認知」並不會因「年齡層」而有所差異。

# ■ 結果說明

## ANOVA表

表 6-5 單因子變異數分析結果

### ANOVA

bi\_avg

	平方和	自由度	平均平方和	F	顯著性
組間	8.422	2	4.211	3.952	.020
組內	352.742	331	1.066		
總和	361.164	333			

- 第一欄：指出了變異來源，包含組間變異、組內變異與總變異。
- 第二欄【平方和】：代表離差平方和。因此，組間離差平方和為8.422，組內離差平方和為352.742，總離差平方和為361.164，它是組間離差平方和與組內離差平方和相加而得。
- 第三欄【自由度】：代表自由度，組間自由度為2（水準數-1），總自由度為333（總樣本數-1），組內自由度為331，它是總自由度和組間自由度之差。
- 第四欄【平均平方和】：代表均方和，即離差平方和除以自由度，組間均方和是4.211，組內均方和是1.066。
- 第五欄【F】：代表F統計量，這是F統計量的值，其計算公式為組間均方和除以組內均方和，用來檢定控制變量對觀測變量影響程度之顯著性，如果不顯著則表示控制變量對觀測變量的變化沒有解釋能力，在此F值為3.952。
- 第六欄【顯著性】：代表顯著值，這是F統計量的機率p值，即當F值為3.952，自由度為（2, 331）時的機率p值為0.020。

## 二. 變異數同質性檢定表

- 變異數同質性檢定的虛無假設為：各年齡層的受訪者之品牌形象整體性認知之變異數沒有差異。

$$H_0 : \mu_1^2 = \mu_2^2 = \mu_3^2$$

表 6-6 變異數同質性檢定表

### 變異數同質性檢定

bi\_avg

Levene 統計量	分子自由度	分母自由度	顯著性
.711	2	331	.492

- 表6-3為變異數同質性檢定之結果，Levene統計量為0.711，顯著性0.492大於0.05，因此須接受虛無假設，即確認各年齡層的受訪者之品牌形象整體性認知之變異數沒有差異。

### 三. Post Hoc檢定

#### 1. 多重比較表 表 6-7 多重比較表

##### 多重比較

依變數:bi\_avg

	(I) 年齡層	(J) 年齡層	平均差異 (I-J)	標準誤	顯著性	95% 信賴區間	
						下界	上界
Scheffe 法	青年	壯年	.01114	.12323	.996	-.2919	.3142
		老年	-.45833*	.18045	.041	-.9020	-.0146
	壯年	青年	-.01114	.12323	.996	-.3142	.2919
		老年	-.46947*	.17317	.026	-.8953	-.0437
	老年	青年	.45833*	.18045	.041	.0146	.9020
		壯年	.46947*	.17317	.026	.0437	.8953
Tamhane 檢定	青年	壯年	.01114	.12108	1.000	-.2799	.3021
		老年	-.45833	.19235	.058	-.9286	.0119
	壯年	青年	-.01114	.12108	1.000	-.3021	.2799
		老年	-.46947*	.18618	.042	-.9259	-.0130
	老年	青年	.45833	.19235	.058	-.0119	.9286
		壯年	.46947*	.18618	.042	.0130	.9259

\*. 平均差異在 0.05 水準是顯著的。

## 2. 同質子集

同質子集中，會將不同水準下的觀測變量平均值分成數個組別，根據分組狀況，就可判斷各水準的差異狀況。

**bi\_avg**

		年齡層	個數	alpha = 0.05 的子集	
				1	2
Scheffe 法 <sup>a, b</sup>	壯年	169	4.2268		
	青年	120	4.2380		
	老年	45		4.6963	
	顯著性		.998	1.000	

顯示的是同質子集中組別的平均數。

a. 使用調和平均數樣本大小 = 82.253。

b. 組別大小不相等。將使用組別大小的調和平均數。不保證型 I 的誤差水準。

第一組有壯年和青年，因此壯年和青年無差異。第二組為老年，因此結論如下：

總結：老人 > 青年, 壯年

## ■ 範例6-3

☞ 參考論文【品牌形象、知覺價值與品牌忠誠度之關係】

之原始問卷，並開啟ex6-2.sav，試利用獨立樣本 T檢定與單因子變異數分析，完成表6-8，並探討人口統計變數對品牌形象之差異性。

表6-8 人口統計變數對品牌形象差異性分析表—F/T 值

構面	性別	婚姻	年齡	職業	教育	月收入
品牌價值						
事後檢定						
品牌特質						
事後檢定						
組織聯想						
事後檢定						

\*  $P \leq 0.05$  \*\*  $P \leq 0.01$  \*\*\*  $P \leq 0.001$